



ผลของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ของไฟรี-โคเรนร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพที่มีต่อความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ระดับมัธยมศึกษา

พลธรา ไทยน้อย¹

รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง²

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ (1) เพื่อศึกษาผลของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไฟรี-โคเรนร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพที่มีต่อความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา โดยเปรียบเทียบความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจัดการเรียนการสอนเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 และเปรียบเทียบความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังจัดการเรียนการสอน และ (2) เพื่อศึกษาพัฒนาการของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในช่วงก่อน ระหว่าง และหลังจากที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไฟรี-โคเรนร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษากรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 38 คน เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไฟรี-โคเรนร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพ เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ (1) แบบวัดความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนการทดลอง และหลังการทดลอง (2) แบบสัมภาษณ์ความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ (3) แบบสังเกตพฤติกรรมความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ และ (4) ใบกิจกรรม วิเคราะห์ข้อมูลโดยค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน การทดสอบค่าที และการวิเคราะห์เนื้อหา ผลการวิจัยพบว่า (1) ความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนการสอนไม่ถึงเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็มอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (2) ระดับความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนการสอนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (3) พัฒนาการของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเปลี่ยนแปลงในทิศทางที่ดีขึ้นตามลำดับในทุกองค์ประกอบของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 3 ด้าน

คำสำคัญ: ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไฟรี-โคเรน, กลวิธีการคิดเชิงภาพ, ความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์

¹ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

² ที่ปรึกษาหลัก รองศาสตราจารย์ประจำหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย



THE EFFECTS OF MATHEMATICS INSTRUCTION ACCORDING TO THE PIRIE-KIEREN THEORY OF
MATHEMATICAL UNDERSTANDING DEVELOPMENT ALONG WITH VISUAL THINKING STRATEGIES ON
MATHEMATICAL LITERACY OF SECONDARY SCHOOL STUDENTS.

Poltara Thainoy³

Aumporn makanong⁴

Abstract

This research aimed (1) to investigate the effects of mathematics instruction based on the Pirie–Kieren theory of mathematical understanding integrated with visual thinking strategies on students’ mathematical literacy. The objectives of the study were to compare students’ mathematical literacy performance after instruction with a 70 percent benchmark and to compare their mathematical literacy performance before and after instruction; and (2) to examine the development of students’ mathematical literacy before, during, and after the instructional implementation. The participants were 38 Grade 10 students from a secondary school under the Office of the Basic Education Commission in Bangkok during the second semester of the 2024 academic year. The experimental instrument was a mathematics lesson plan designed in accordance with the Pirie–Kieren theoretical framework, integrated with visual thinking strategies. Research instruments included: (1) pre-and post-instruction mathematical literacy assessments, (2) a structured interview protocol, (3) a behavioral observation checklist, and (4) instructional activity sheets. Data were analyzed using arithmetic mean, standard deviation, t-tests, and content analysis. The findings revealed that: (1) Students’ post-instruction mathematical literacy did not meet the 70 percent benchmark at the .05 significance level; (2) Their post-instruction scores were significantly higher than their pre-instruction scores at the .05 significance level; and (3) Students demonstrated continuous and positive development in all three components of mathematical literacy— mathematical modeling, application of mathematical knowledge and processes, and interpretation and evaluation of results— throughout the instructional period.

KEYWORDS: Pirie-kieren theory of mathematical understanding development / Visual thinking strategies / Mathematical literacy

³ A graduate student in the Master of Education Program in Mathematics Education, Faculty of Education, Chulalongkorn University

⁴ Principal Advisor, ASSOC. PROF. in the Master of Education Program in Mathematics Education, Faculty of Education, Chulalongkorn University



บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์สำคัญที่ส่งเสริมการคิดวิเคราะห์ การแก้ปัญหา และการตัดสินใจในชีวิตประจำวัน รวมถึงเป็นทักษะที่จำเป็นในศตวรรษที่ 21 ทางองค์การเพื่อความร่วมมือทางเศรษฐกิจและการพัฒนา หรือ OECD จึงได้ประเมินความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Literacy) ของนักเรียนผ่านโครงการ PISA เพื่อสะท้อนความสามารถในการประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์จริง อย่างไรก็ตามจากผลการประเมิน PISA ในปี 2022 นักเรียนไทยมีคะแนนเฉลี่ยด้านคณิตศาสตร์ต่ำสุดนับตั้งแต่ปี 2000 โดยมีค่าเฉลี่ยต่ำกว่าค่าเฉลี่ยของ OECD อย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้ ผลการสอบ PAT1 (ความถนัดทางคณิตศาสตร์) ในปีการศึกษา 2563–2564 ยังแสดงให้เห็นว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนอยู่ในระดับต่ำอย่างต่อเนื่อง สะท้อนถึงข้อจำกัดในการทำความเข้าใจเชิงลึกของเนื้อหาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในเรื่องที่มีความซับซ้อนเชิงนามธรรม เช่น เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

สำหรับการแก้ปัญหาดังกล่าว งานวิจัยนี้จึงนำเสนอแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรี-ไคเรน (Pirie-Kieren Theory) ซึ่งมุ่งเน้นการพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนผ่าน 8 ระดับของความเข้าใจที่เป็นแบบวงรอบ (Recursive) และผสมผสานร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพ (Visual Thinking Strategies: VTS) ที่มีจุดเด่นในการส่งเสริมให้นักเรียนสร้างภาพหรือแบบจำลองในใจ เพื่อช่วยให้สามารถเชื่อมโยงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเป็นนามธรรมได้อย่างมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ทั้งนี้งานวิจัยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้ที่ออกแบบตามทฤษฎีดังกล่าวที่มีต่อความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยมุ่งเปรียบเทียบความสามารถด้านความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ รวมทั้งเปรียบเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม และติดตามพัฒนาการของนักเรียนในช่วงก่อน ระหว่าง และหลังการเรียนการสอน ผลการศึกษานี้คาดว่าจะช่วยเป็นแนวทางในการออกแบบกิจกรรมที่ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความเข้าใจคณิตศาสตร์ในระดับลึกซึ้ง และสามารถนำไปใช้ในบริบทต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น

คำถามการวิจัย

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรี-ไคเรนร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพสามารถพัฒนาความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาได้หรือไม่ อย่างไร



วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาผลของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไฟรี-โคเรนร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพที่มีต่อความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ประกอบไปด้วย

1.1) เปรียบเทียบความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจัดการเรียนการสอนเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70

1.2) เปรียบเทียบความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังจัดการเรียนการสอน

2. เพื่อศึกษาพัฒนาการของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในช่วงก่อน ระหว่าง และหลังจากที่ได้รับการจัดการเรียนการสอน

ขอบเขตของการวิจัย

1. เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยนี้ เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พุทธศักราช 2560) รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน และเพิ่มเติม ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เนื้อหาความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

2 ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ - การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไฟรี-โคเรน ร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพ

ตัวแปรตาม - ความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์
องค์ประกอบที่ 1 คือ การใช้คณิตศาสตร์ในการคิด แปลง หรืออธิบายสถานการณ์ เพื่อทำความเข้าใจปัญหาในบริบท

องค์ประกอบที่ 2 คือ การใช้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การแก้ปัญหา

องค์ประกอบที่ 3 คือ การตีความ และประเมินผลลัพธ์จากการแก้ปัญหา

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1) งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไฟรี-โคเรน

สุธิดา นานซำ (2549) ศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้โดยใช้ทฤษฎีไฟรี-โคเรนกับนักเรียน ม.1 พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีมีโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม แม้ความแตกต่างไม่เป็นนัยสำคัญทางสถิติ แต่พบว่ามี ความคงทนทางการเรียนรู้สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ

ชาญวิทย์ เศรษฐพานิชผล (2561) ศึกษาการใช้วิธีสอนของไฟรี-โคเรนกับนักเรียน ม.4 พบว่า กลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์และความพึงพอใจต่อการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ



อาภรณ์ พักแก้ว และคณะ (2561) เปรียบเทียบการจัดการเรียนรู้ตามฟรี-โคเรนกับการแก้ปัญหาแบบโพลยาในนักเรียน ม.2 พบว่า กลุ่มฟรี-โคเรนมีพัฒนาการในการแก้ปัญหายังมีนัยสำคัญจากก่อนเรียน แต่เมื่อเทียบกับกลุ่มโพลยาไม่พบความแตกต่าง

Grinevitch (2004) ศึกษาการใช้ทฤษฎีฟรี-โคเรนกับนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัยในวิชา Algebra พบว่า ทฤษฎีสามารถจำแนกระดับความเข้าใจในทศน์เชิงลึกของผู้เรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

Khatib (2016) ศึกษาผลของการใช้ทฤษฎีฟรี-โคเรนกับนักเรียน ม.1 ในประเทศจอร์แดน พบว่า กลุ่มทดลองมีการคิดอย่างมีเหตุผลสูงขึ้นและภาระทางความคิดลดลง เมื่อเทียบกับกลุ่มควบคุม

Mizban (2017) ทดลองใช้แบบจำลองฟรี-โคเรนกับนักเรียน ม.1 พบว่ากลุ่มทดลองมีพัฒนาการด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และระดับความเข้าใจในคณิตศาสตร์ทุกระดับ สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ

Prof. Dr. Faeeza Al Chalabi & Al-Saadi (2019) ศึกษาผลของการเรียนการสอนแบบฟรี-โคเรนกับโมทัศน์คณิตศาสตร์ 17 หัวข้อ พบว่ากลุ่มทดลองมีคะแนนในแต่ละโมทัศน์สูงกว่ากลุ่มควบคุมถึง 16 หัวข้อ และเสนอให้ใช้กับตัวแปรอื่น เช่น ความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์

2) งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์

รุ่งทิภา บุญมาตัน และคณะ (2560) ใช้การเรียนรู้โดยใช้บริบทเป็นฐานตามวงจร PAOR พัฒนาความฉลาดรู้ของนักเรียน ม.5 ในเรื่องความน่าจะเป็น พบว่านักเรียนพัฒนาความฉลาดรู้ได้ดี โดยเฉพาะการตีความสถานการณ์ที่ใกล้ตัว และสามารถแลกเปลี่ยนความคิดและวิเคราะห์ได้

กมลกานต์ ศรีธิ และคณะ (2561) ใช้การเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐานในเรื่องภาคตัดกรวย พบว่าผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงเนื้อหาเกี่ยวกับชีวิตจริงได้ดี กระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้รับการพัฒนา โดยเฉพาะการแก้ปัญหาและการประเมินผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์

พิมพ์พิชา เอกพันธ์ (2563) จัดกิจกรรมโดยใช้บริบทเป็นฐานและเทคนิค KWDL พัฒนาเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นในนักเรียน ม.5 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ผ่านเกณฑ์ความสามารถด้านความฉลาดรู้ และสามารถแปลงปัญหาในบริบทเป็นสถานการณ์เชิงคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น

ชรินทร์ ดั่งธรรม และวรินทร์ พูนไพบูลย์พิพัฒน์ (2564) วิจัยแนวทางการเรียนรู้ออนไลน์ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์กับเรื่องความน่าจะเป็น พบว่านักเรียนมีพัฒนาการทั้ง 3 ด้านของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะด้านการคิดและแปลงสถานการณ์เชิงคณิตศาสตร์

Firdaus, Wahyudin, & Herman (2017) ศึกษาผลของการใช้ปัญหาเป็นฐานกับการสอนทางตรงในอินโดนีเซีย พบว่าการใช้ปัญหาเป็นฐานพัฒนาความฉลาดรู้ได้ดีกว่า โดยเฉพาะในพื้นที่ชนบท ไม่มีความแตกต่างตามภูมิศาสตร์ของโรงเรียน



Aulia Nurutami, Riyadi, & Sri Subanti (2018) วิเคราะห์นักเรียนตามความสามารถทางคณิตศาสตร์ พบว่า ผู้มีความสามารถสูงทำได้ถึงระดับ PISA ระดับ 4 ขณะที่ผู้มีความสามารถต่ำไม่สามารถทำได้ถึงระดับ 2 สะท้อนว่าความสามารถพื้นฐานส่งผลโดยตรงต่อความฉลาดรู้

Farhan, Satianingsih, & Yustitia (2021) วิจัยแบบกึ่งทดลอง เปรียบเทียบการใช้ปัญหาเป็นฐานกับโครงการ พบว่าการใช้ปัญหาเป็นฐานได้ผลดีกว่าในแง่การส่งเสริมความฉลาดรู้ นักเรียนมีความกระตือรือร้น และตอบสนองการเรียนรู้เชิงปัญหาได้ดี

วิธีการดำเนินการวิจัย

การออกแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ เป็นการวิจัยแบบศึกษากลุ่มเดียววัดหลายครั้งแบบอนุกรมเวลา (Quasi-Experimental Time-Series Design) ดังตาราง

แผนการวิจัย	ระยะเวลาการทดลอง		
	ก่อนทดลอง	ระหว่างการทดลอง	หลังการทดลอง
การทดสอบความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ (C)	C_1	-	C_2
การเก็บข้อมูลพัฒนาการความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ (OC)	OC_0	$OC_1 - OC_2 - OC_3$	OC_4

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการวิจัย

C_1 และ C_2 แทน การทดสอบความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการทดลองตามลำดับ

OC_0 และ OC_4 แทน การเก็บข้อมูลความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการทดลองตามลำดับ

OC_1, OC_2 และ OC_3 แทน การเก็บข้อมูลความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ระหว่างการทดลองในระยະที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร ในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานกระทรวงศึกษาธิการ โดยผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยใช้เทคนิคการเลือกตัวอย่างแบบเจาะจง



(purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 38 คน ที่มีลักษณะผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์

การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ 1) เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ แผนการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของไพรี-โคเรน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 12 แผน ระยะเวลา 12 คาบ (คาบละ 50 นาที) และ 2) เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบวัดความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อน และหลังเรียน แบบสัมภาษณ์ แบบสังเกตพฤติกรรม และใบกิจกรรม

การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการทดลอง และเก็บรวบรวมข้อมูลดังนี้ 1. สร้างและพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยทั้งหมด 2. ทดลองใช้เครื่องมือในการวิจัยทั้งหมดกับนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถในการเรียนรู้ใกล้เคียงกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง แต่คนละกลุ่มกับกลุ่มตัวอย่าง และปรับปรุงเครื่องมือในการวิจัยทั้งหมดให้มีคุณภาพมากยิ่งขึ้นก่อนนำไปใช้จริง 3. ดำเนินการวัดความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนทดลอง โดยใช้แบบวัดความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนทดลอง แล้วนำคะแนนความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์มาเรียงลำดับ เพื่อกำหนดนักเรียนกลุ่มเป้าหมายเพื่อทำการสัมภาษณ์ และสังเกตในห้วงเวลาที่กำหนดไว้ในแต่ละระยะ 4. ดำเนินการทดลองตามแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 12 คาบเรียน และหลังจากคาบที่ 4, 8 และ 12 ทำการสัมภาษณ์ และสังเกตนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย 5. เมื่อการทดลองเสร็จสิ้น ผู้วิจัยดำเนินการวัดความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบวัดความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังทดลอง และศึกษาพัฒนาการความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์หลังทดลอง 6. ดำเนินการรวบรวมข้อมูลทั้งหมด เพื่อทำการวิเคราะห์ และนำเสนอข้อมูล โดยทำการวิเคราะห์ทั้งในรูปแบบข้อมูลเชิงปริมาณ และข้อมูลเชิงคุณภาพควบคู่กันเพื่อให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของการวิจัย

ผลการวิจัย

1. ผลการเปรียบเทียบความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนการสอนเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม

ตาราง แสดงค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{X}) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) และค่าการทดสอบที (t - test) ของคะแนนความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการทดลองเทียบกับเกณฑ์ ร้อยละ 70 (คะแนนเต็ม 25 คะแนน)



ระยะ	ความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์			t	p
	\bar{X}	ร้อยละ	S.D.		
หลังทดลอง	15.33	61.32	2.86	-118	1.00

$p < .05$

สรุปได้ว่า ระดับความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้ไม่ถึงเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็มที่กำหนดไว้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ผลการเปรียบเทียบความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อน และหลังการจัดการเรียนการสอน

ตาราง แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{X}) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของคะแนนความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งแบบจำแนกตามองค์ประกอบ และแบบภาพรวมของนักเรียน ($n = 38$) ก่อนการทดลอง และหลังการทดลอง

	ระยะ	\bar{X}	S.D.	t	p
องค์ประกอบที่ 1 (10 คะแนน)	ก่อนทดลอง	3.17 (31.7%)	1.62	-13.12*	< .001
	หลังทดลอง	7.16 (71.6%)	1.24		
องค์ประกอบที่ 2 (10 คะแนน)	ก่อนทดลอง	1.63 (16.3%)	1.88	-10.06*	< .001
	หลังทดลอง	5.65 (56.5%)	1.34		
องค์ประกอบที่ 3 (5 คะแนน)	ก่อนทดลอง	0.95 (19.0%)	1.16	-5.73*	< .001
	หลังทดลอง	2.53 (50.6%)	0.95		
ภาพรวม (25 คะแนน)	ก่อนทดลอง	5.75 (23.0%)	3.87	-118*	< .001



สรุปได้ว่า ระดับความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทั้งในภาพรวมและในแต่ละองค์ประกอบของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์

3. ผลการศึกษาพัฒนาการความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อน ระหว่าง และหลังการทดลอง

ช่วงก่อนการทดลอง

จากการศึกษาพัฒนาการความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายในช่วงก่อนการทดลอง พบว่า นักเรียนกลุ่มเป้าหมายมีความสามารถในแต่ละด้านตามองค์ประกอบค่อนข้างน้อย โดยองค์ประกอบที่มีความสามารถน้อยที่สุด คือ การตีความ และประเมินผลลัพธ์จากการแก้ปัญหา ตามมาด้วยการใช้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ ที่นำไปสู่การแก้ปัญหา และสุดท้าย คือ การใช้คณิตศาสตร์ในการคิด แปลง หรืออธิบายสถานการณ์ เพื่อทำความเข้าใจปัญหาในบริบทต่าง ๆ ตามลำดับ

ช่วงระหว่างการทดลอง

นักเรียนกลุ่มสูงในระยะเริ่มต้นจะแสดงพฤติกรรมแต่ละด้านออกมาได้เกือบครบทุกพฤติกรรมแล้ว จนเมื่อถึงระยะที่ 2 จะพบว่านักเรียนในกลุ่มนี้สามารถแสดงพฤติกรรมออกมาได้ครบทุกด้าน แต่จะมีนักเรียนคนที่ 3 ในกลุ่มนี้ ที่ในระยะสุดท้ายมีการแสดงออกทางพฤติกรรมในองค์ประกอบที่ 2 และองค์ประกอบที่ 3 ได้ไม่ดีเท่าระยะก่อนหน้า

นักเรียนกลุ่มกลางในระยะเริ่มต้นสามารถแสดงพฤติกรรมในองค์ประกอบที่ 1 ด้านการระบุประเด็นทางคณิตศาสตร์ของสถานการณ์ที่ตั้งอยู่ในบริบทของชีวิตจริง หรือแยกย่อยสถานการณ์ปัญหาให้อยู่ในรูปอย่างง่ายเพื่อทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์มากขึ้นได้ครบทุกคน และยังคงแสดงได้จนถึงสิ้นสุดการทดลอง ส่วนด้านการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ที่เป็นมาตรฐานที่เหมาะสมสอดคล้องกับสถานการณ์ในบริบทของชีวิตจริง ส่วนในองค์ประกอบที่ 2 ด้านการระบุความรู้ และหลักการที่จะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม เมื่อเข้าสู่ระยะที่ 1 ของการทดลองนักเรียนในกลุ่มนี้ก็สามารถแสดงพฤติกรรมได้ครบทุกคน และการดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเหมาะสม เมื่อเข้าสู่ระยะที่ 2 ของการทดลองนักเรียนในกลุ่มนี้ก็สามารถแสดงพฤติกรรมได้ครบทุกคน แต่จะมีพฤติกรรมในองค์ประกอบที่ 3 ที่นักเรียนในกลุ่มนี้แสดงออกมาได้ช้าที่สุด โดยมีนักเรียนที่เพิ่งแสดงพฤติกรรมนี้ออกมาในระยะที่ 3

นักเรียนกลุ่มต่ำในระยะเริ่มต้นแทบจะไม่สามารถแสดงพฤติกรรมใดออกมาได้เลย แต่เมื่อถึงระยะที่ 1 นักเรียนในกลุ่มนี้เริ่มแสดงพฤติกรรมในองค์ประกอบที่ 1 และพฤติกรรมในองค์ประกอบที่ 2 ด้านการระบุความรู้ และหลักการที่จะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และเมื่อเข้าสู่ระยะที่ 2 นักเรียนแสดงพฤติกรรมในองค์ประกอบที่ 1 และ 2 ออกมาได้ทั้งหมด ยกเว้น



พฤติกรรมในองค์ประกอบที่ 3 และเมื่อเข้าสู่ระยะสุดท้ายของการทดลองมีนักเรียนในกลุ่มนี้เพียง 2 คนเท่านั้นที่สามารถแสดงพฤติกรรมออกมาได้ครบตาม 3 องค์ประกอบ เพราะมีนักเรียนคนที่ 3 ของกลุ่มนี้ที่ไม่สามารถแสดงพฤติกรรมตามองค์ประกอบที่ 3 ออกมาได้

ช่วงหลังการทดลอง

จากการศึกษาพัฒนาการความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายในช่วงหลังการทดลองสามารถสรุปได้ว่า นักเรียนกลุ่มเป้าหมายโดยภาพรวมนั้นมีพัฒนาการที่ดีขึ้นในทุกพฤติกรรมแต่ละด้านตามองค์ประกอบต่าง ๆ แต่ถ้าหากดูเป็นรายบุคคลจะพบว่าตั้งแต่ช่วงก่อนการทดลองจนกระทั่งหลังการทดลอง มีนักเรียนกลุ่มเป้าหมายจากกลุ่มต่ำ 1 คน ที่ยังไม่มีพัฒนาการในการแสดงพฤติกรรมตามองค์ประกอบที่ 3 นั่นคือ การตีความ หรือประเมินผลลัพธ์จากการแก้ปัญหาออกมาอย่างชัดเจนให้สังเกตได้

จึงสรุปได้ว่าพัฒนาการของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเปลี่ยนแปลงในทิศทางที่ดีขึ้นตามลำดับในทุกองค์ประกอบของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 3 ด้าน

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าการจัดการเรียนรู้ตามทฤษฎีของไฟรี-โคเรนร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพได้ก่อให้เกิดพัฒนาการเชิงบวกอย่างต่อเนื่องในความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน โดยเฉพาะในองค์ประกอบที่ 1 และ 2 ส่วนองค์ประกอบที่ 3 แม้พัฒนาขึ้นแต่ยังต้องการการส่งเสริมเพิ่มเติมให้เข้มข้นยิ่งขึ้นเพื่อให้นักเรียนทุกคนบรรลุถึงระดับที่ต้องการ

อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

อภิปรายผลการวิจัย

ผลการวิจัยพบว่าการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีไฟรี-โคเรนร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพ ส่งผลให้ความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนพัฒนาขึ้นในทุกองค์ประกอบอย่างมีนัยสำคัญ **องค์ประกอบที่ 1** ด้านการแปลงสถานการณ์สู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีพัฒนาการสูงสุดโดยนักเรียนสามารถสร้างภาพแทนความเข้าใจสถานการณ์จริงได้ดีขึ้นอย่างชัดเจน เนื่องจากกลวิธีการคิดเชิงภาพช่วยให้นักเรียนเห็นภาพปัญหาและนำไปสู่การแก้ไขอย่างถูกต้อง สอดคล้องกับแนวคิดของไฟรี-โคเรนที่เน้นการสร้างภาพในใจเพื่อเชื่อมโยงความรู้ **องค์ประกอบที่ 2** ด้านการใช้ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหา แม้ว่าคะแนนเฉลี่ยจะยังต่ำกว่าเกณฑ์ 70% แต่ก็มีการพัฒนาจากก่อนเรียนอย่างชัดเจน โดยนักเรียนสามารถวางแผนแก้ปัญหาและใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น การฝึกปฏิบัติจริงและการคิดเชิงภาพช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาความชำนาญในการแก้โจทย์ปัญหาซับซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับหลักการปัดกลับของทฤษฎีไฟรี-โคเรน **องค์ประกอบที่ 3** ด้านการตีความและประเมินผลลัพธ์ นักเรียนยังมีพัฒนาการน้อยที่สุด แม้จะมีแนวโน้มที่ดีขึ้นอย่างมีนัยสำคัญเมื่อเทียบกับก่อนเรียน แต่นักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่คุ้นชินกับการอธิบายหรือประเมินความสมเหตุสมผลของคำตอบ การฝึกฝนอย่างต่อเนื่องจึงจำเป็นสำหรับการพัฒนาทักษะในระดับสูงขึ้น ผลที่ได้ชี้ให้เห็นว่า



แนวทางการสอนดังกล่าวมีศักยภาพในการช่วยให้นักเรียนก้าวสู่ระดับการคิดขั้นสูงหากมีระยะเวลาและการสนับสนุนที่เหมาะสม

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะการนำผลวิจัยไปใช้

1) การนำกลวิธีการคิดเชิงภาพมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์อย่างสม่ำเสมอ โดยให้นักเรียนฝึกวาดภาพหรือใช้สัญลักษณ์เพื่อช่วยเข้าใจโจทย์ปัญหา ซึ่งจะส่งเสริมการเข้าใจที่ลึกซึ้งและลดการท่องจำ

2) ครูควรออกแบบกิจกรรมที่ส่งเสริมการมีส่วนร่วม เช่น การแก้ปัญหาในกลุ่มหรือสถานการณ์สมมติ เพื่อให้ผู้เรียนมีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดและสร้างความเข้าใจร่วมกัน ตามแนวทางของทฤษฎีไพรี-โคเรน อีกทั้งควรใช้คำถามท้าทายความคิดนักเรียนอยู่เสมอ เพื่อฝึกทักษะการตีความและประเมินผลลัพธ์ของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง และพัฒนาแผนการเรียนรู้ที่ใช้ทฤษฎีไพรี-โคเรนร่วมกับกลวิธีการคิดเชิงภาพ ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้กับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่หลากหลายได้

ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

1) ควรศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้ในบริบทที่แตกต่าง เช่น โรงเรียนทั่วไปหรือพื้นที่ห่างไกล เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิผลในกลุ่มผู้เรียนที่ต่างกัน

2) การวิจัยติดตามผลระยะยาวเพื่อประเมินความคงทนของความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์และการนำทักษะที่ได้ไปใช้ในบริบทอื่น ๆ

3) ควรศึกษาวิจัยเชิงทดลองโดยแยกองค์ประกอบการสอนแต่ละส่วนอย่างละเอียด เพื่อระบุองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อการพัฒนาความฉลาดรู้ทางคณิตศาสตร์มากที่สุด อันจะนำไปสู่แนวทางการจัดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพสูงสุด

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*.

กระทรวงศึกษาธิการ.

กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2551*.

กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมชนสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา. (2567). *หนังสือรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2*. กรุงเทพฯ: โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา.



กมลกานต์ ศรีธิ และคณะ. (2561). การวิจัยปฏิบัติการเพื่อพัฒนาการจัดการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐานที่ส่งเสริมการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วารสารวิชาการและวิจัยสังคมศาสตร์. 13 (37), 105-118.

จิรวุฒิ ตันทานนท์. (2564). ผลการใช้รูปแบบการสอนที่เน้นกระบวนการแอบสแตรกชันร่วมกับกลวิธีการเรียนรู้เชิงภาพที่มีต่อความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดวิเคราะห์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ชรินทร์ ดั่งธรรม และวนิทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์. (2564). การพัฒนาความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ด้วยการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ตามกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เรื่อง ความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. วารสารร้อยแก่นสารมหาวิทยาลัยนเรศวร, 7(11), 372-389.

ชาญวิทย์ เศรษฐพานิชผล. (2561). การศึกษาเรื่องการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้วิธีสอนของไพรีและไคเรน เรื่องระบบจำนวนจริง. (วิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน), โรงเรียนศรีอยุธยาในพระอุปถัมภ์ฯ, สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1, สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน, กระทรวงศึกษาธิการ.

ณัฐดนัย โสทะ. (2563). การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงเพื่อส่งเสริมการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (สารนิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยนเรศวร.

ปริญญา ชมนก. (2565). การส่งเสริมความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ด้วยกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาทรัพยากรน้ำจังหวัดสุโขทัยเป็นฐาน เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. (สารนิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยนเรศวร.

มะลิวรรณ งามยิ่ง. (2563). การพัฒนาหลักสูตรความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา. (ปริญญาานิพนธ์ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต), มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

รุ่งทิพา บุญมาโตน และคณะ. (2560). การพัฒนาการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ด้วยการจัดการเรียนรู้โดยใช้บริบทเป็นฐาน. วารสารวิทยบริการมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์, 29(2), 51-61.

ศูนย์ดำเนินงาน PISA แห่งชาติ, สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2564). ผลการประเมิน PISA 2018 การอ่าน คณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

ศูนย์ดำเนินงาน PISA แห่งชาติ, สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2566). ผลการประเมิน PISA 2022 : บทสรุปผู้บริหาร. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.



- สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2563). *สรุปผลการทดสอบความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT1) ปีการศึกษา 2563*. สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ.
- สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2564). *สรุปผลการทดสอบความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1) ปีการศึกษา 2564*. สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *คู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1*. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
- สุนิสา สุมิตรณะ. (2555). *การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมการรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้แนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง และกระบวนการแก้ปัญหา DAPIC*. (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุธิดา นานข้า. (2549). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อเมตริกซ์และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จังหวัดตรัง*. (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อัมพร ม้าคะนอง. (2553). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ*. กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อลิสรา ชมชื่น. (2550). *การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร และการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น*. (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรดุษฎีบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อาภรณ์ พักแก้วและคณะ. (2561). *การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ระหว่างการจัดการเรียนรู้ตามทฤษฎีของไพรีและไคเรนกับการจัดการเรียนรู้ตามขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2*. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, วิทยาเขตปัตตานี.
- Al-Khatib, Mohammed Ahmad (2017). *The Impact of Using Pirie and Kieren Model for Mathematical Understanding in Reasoning and Reducing the Cognitive Burden of Seventh Grade Students in Jordan*, Faculty of Educational Sciences, Hashemite University, Jordan.
- Aulia Nurutami, Riradi, Sri Subanti. (2018). *The Analysis of Students' Mathematical Literacy Based on Mathematical Ability*, Universitas Sebelas Maret, Indonesia.
- Berenson, S., Cavey, L., Clark, M., & Staley, K. (2001). *Adapting Pirie and Kieren's model of mathematical understanding to teacher preparation*. Paper presented at



the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, NL.

- Campos Teri. (2018). *Using Visual Thinking Strategies to Improve Mathematics Instruction*, Dissertation, University of Missouri, Kansas City.
- Droujkova, M. (2005). *Roles of Metaphor in the Growth of Mathematical Understanding*. Unpublished Doctoral Dissertation, North Carolina State University, Raleigh.
- Faeeza Abd Al-Qadir Al chalabi, Rafah Riyadh Khazaal Al-saadi. (2019). *The Effect Of Using Pirie And Kieran's Model To Acquire Concepts At The First Year Intermediate Female Students In Mathematics*. University of Mustansiriya, Venezuela.
- Farhan, Satianingsih, & YUSTITIA. (2021). *Problem Based Learning On Literacy Mathematics : Experimental Study in Elementary School*. **Journal of Medives, Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang**, v.5, n.1, p.118-128, jan.2021.
- Firdaus, Wahyudin, & Herman. (2017). *Improving primary students' mathematical literacy through problem based learning and direct instruction*. Syarif Hidayatullah State Islamic University Jakarta, Indonesia.
- Maria A. Droujkova, Sarah B. Berenson, Kelli Slaten, Sue Tombes. (2005). *A conceptual framework for studying teacher preparation: the pirie-kieren model, collective understanding, and metaphor*. Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp.289-296.
- Mizban, Zahra Muz' al. (2017). *Effect of Karen Model on Achievement and Development of Levels of Mathematics Understanding among First Grade Intermediate Students*, (Master Thesis), Mustansiriya University, College of Education, Baghdad, Iraq.
- Pirie, S. and Kieren, T. (1994). *Beyond Metaphor: Formalizing in Mathematical Understanding within Constructivist Environments*. For the Learning of Mathematics, 14 (1), 3943



Pirie, S.E.B.& Kieren T.E. (1989). *A recursive theory of mathematical understanding*. For the Learning of Mathematics, 9(3),7-11.

Xiangquan Yao. (2020). *Characterizing Learners’ Growth of Geometric Understanding in Dynamic Geometry Environments : a Perspective of the Pirie–Kieren Theory*, Department of Curriculum and Instruction, Pennsylvania State, Digital Experiences in Mathematics Education 6: 293–319.