สาระลึกซึ้งเกี่ยวกับ r_{XY} : กรณี r_{XY} = 0.00

Depth of r_{XY} Value: In Case r_{XY} Value = 0.00

สมนึก ภัททิยธนี[1*]

Somnuk Pattiyathani[1*]

(Received: June 11, 2020 ; Revised: September 2, 2020 ; Accepted: September 7, 2020)

บทคัดย่อ

ถ้าคำนวณหาค่า r_{XY} ได้เท่ากับ 0.00 แปลว่า X กับY ไม่สัมพันธ์เชิงเส้นตรงอย่างแน่นอน และหากนำคู่อันดับเหล่านั้นไปเขียนกราฟลงในพิกัดฉาก จะมีลักษณะเป็นรูปสมมาตร 1 แกน หรือ 2 แกน ขนานแกน X หรือแกน Y หรือทั้ง 2 แกน เสมอ และถ้าคู่อันดับที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ขนานกับแกน X หรือ แกน Y เพียง 1 แกน ก็จะไม่สามารถแสดงวิธีคำนวณหาค่า r_{XY} ได้ ซึ่งโดยหลักการดังกล่าวข้างต้นต้องเท่ากับ 0.00 ทั้งนี้เป็นเพราะเมื่อแทนค่าจากคู่อันดับที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันลงในสูตรการหาค่า r_{XY} แล้วตัวส่วนของสูตรเป็น 0 จึงกล่าวได้ว่าเป็นเรื่องที่จะอธิบายให้เข้าใจได้ยาก

การทำความเข้าใจยุ่งยากไปกว่านี้ก็คือ การเปลี่ยนรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ได้แก่ Ax + By + C = 0 ให้อยู่ในรูปสมการพยากรณ์ ได้แก่ $y = -\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}x - \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}}$ หรือ y = bx + a โดยค่า r_{XY} จะเท่ากับ 0.00 หรือไม่ก็ตาม ซึ่งวิธีอธิบายที่ดีก็คือ ควรแบ่งเรื่องดังกล่าวออกเป็น 4 กรณี ดังนี้

<u>กรณีที่ 1 ถ้า A,B และ C $\neq$ 0</u> เส้นกราฟจะมีความชัน (slope) เช่น Ax + By + C = 0 หรือ y = bx + a ตัวอย่าง ได้แก่ -3x + 2y -6 = 0 หรือ $y = \frac{3}{2}\mathbf{X} + 3$

<u>กรณีที่ 2 ถ้า A หรือ B $\neq$ 0 แต่ C = 0</u> เส้นกราฟจะมีความชัน เช่น Ax + By + 0 = 0 หรือ y = bx ตัวอย่าง ได้แก่ -3x + 2y = 0 หรือ $y = \frac{3}{2}\mathbf{X}$

<u>กรณีที่ 3 ถ้า A หรือ B = 0 และ C = 0 ด้วย</u> เส้นกราฟคือแกน X (ถ้า A = 0) หรือแกน Y (ถ้า B = 0) จึงไม่มีความชัน เช่น (0)x + By + 0 = 0 หรือ y = 0 ตัวอย่าง ได้แก่ (0)x + 5y = 0 หรือ y = 0

<u>กรณีที่ 4 ถ้า A หรือ B = 0 แต่ C $\neq$ 0</u> เส้นกราฟจะขนานกับแกน X หรือแกน Y จึงไม่มีความชัน เช่น (0)x + By + C = 0 หรือ y = (0)x + C ตัวอย่าง ได้แก่ (0)x – 4y + 12 = 0 หรือ y = 3

---

[1] รองศาสตราจารย์ ข้าราชการบำนาญ ภาควิชาวิจัยและพัฒนาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

[1] Associate Professor, retired government official, Department of Research and Educational Development, Faculty of Education, Mahasarakham University

* Corresponding Author E-mail: somnukp1@hotmail.com

ในกรณีที่ 4 นี้ ผู้เรียนเกิดความสับสนไม่เข้าใจถึงเหตุผลที่มาของรูปสมการเหล่านี้ เพราะการอธิบายขาดการใช้สมการในรูป y = $\frac{(0)x}{B} - \frac{C}{B}$ เมื่อกำหนดให้ A = 0 หรือตัวอย่างสมการจริง ได้แก่ y = $\frac{(0)x}{4} + 3$ เป็นต้น

คำสำคัญ : ความลึกซึ้งเกี่ยวกับค่า r_{XY} กรณีค่า r_{XY} = 0.00 สมการเชิงเส้นสองตัวแปรในรูปของสมการพยากรณ์

Abstract

If calculating the value of r_{XY} yields 0.00, then X and Y are definitely not linearly correlated. And if these ordered pairs are graphed into rectangular coordinate, they will always look like a symmetrical figure of 1 axis or 2 axes that are parallel to the X axis or the Y axis or both. And if the ordered pairs that are in the same straight line are parallel to only the X axis or Y axis, it will not be able to show how to calculate the r_{XY} value which, by the above principles, must be equal to 0.00. The reason is that when we substitute the values from the ordered pairs that are in the same straight line into the formula of r_{XY}, then the denominator of the formula is 0. So it can be said that it is difficult to explain.

What is more difficult to understand is the general transformation of a two-variable linear equation, Ax + By + C = 0, into a predictive equation, namely y = $-\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ or y = bx + a, whether or not the value is 0.00. To explain this, the aforementioned issue should be divided into 4 cases as follows:

<u>Case 1: If A, B and C ≠ 0,</u> the graph will have a slope such as Ax + By + C = 0 or y = bx + a. Example: -3x + 2y - 6 = 0 or y = $\frac{3}{2}x$ + 3

<u>Case 2: If A or B ≠ 0 but C = 0,</u> the graph will have a slope such as Ax + By + 0 = 0 or y = bx. Examples: -3x + 2y = 0 or y = $\frac{3}{2}x$

<u>Case 3: If A or B = 0 and C = 0</u>, the graph which is the X axis (if A = 0) or the Y axis (if B = 0) then has no slope such as (0)x + By + 0 = 0 or y = 0. Examples: (0)x + 5y = 0 or y = 0.

<u>Case 4: If A or B = 0 but C ≠ 0,</u> the graph is parallel to the X or the Y axis, so there is no slope such as (0) x + By + C = 0 or y = (0) x + C. Examples: (0)x - 4y +12 = 0 or y = 3

In case 4, learners are confused and do not understand the reason for the form of these equations because the explanation lacks the use of equation in the form of y = $\frac{(0)x}{B} - \frac{C}{B}$, given A = 0 or from the example of real equation: y = $\frac{(0)x}{4} + 3$ etc.

Keywords: depth of r_{XY} value in case r_{XY} value = 0.00, two-variable linear equation in the form of predictive equations

บทนำ

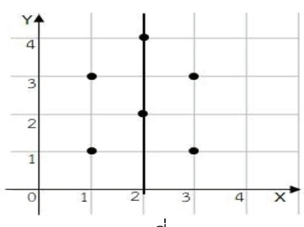
ปกติการหาค่า r_{XY} นักวิจัยจะสนใจว่า ค่า r_{XY} สัมพันธ์เชิงบวก (สูงสุด 1.00) หรือเชิงลบ (ต่ำสุด -1.00) ส่วนค่า r_{XY} **= 0.00 แปลว่า X กับ Y ไม่สัมพันธ์เชิงเส้นแน่นอน** (บุญชม ศรีสะอาด และคณะ, 2555) สาระดังกล่าวนี้ผู้เขียนเคยเขียนลงในวารสาร การวัดผลการศึกษา มหาวิทยาลัยมหาสารคาม ปีที่ 22 ฉบับที่ 2 ธันวาคม 59 หน้า 3 - 16 ในหัวข้อเรื่อง “สิ่งที่น่ารู้เกี่ยวกับ r_{XY}” (สมนึก ภัททิยธนี, 2559, 2562) ซึ่งมีอยู่ประเด็นหนึ่งที่ผู้เขียนสรุปว่า ค่า r_{XY} จะเท่ากับ 0.00 ต่อเมื่อนำคู่อันดับ (x,y) ทุกคู่เขียนกราฟลงในพิกัดฉาก ถ้ารูปกราฟอยู่ในลักษณะที่มีแกนสมมาตร 1 หรือ 2 แกน ที่**ขนานกับแกน X หรือแกน Y หรือทั้งสองแกน ค่า r_{XY} จะเท่ากับ 0.00 ทุกครั้ง** แต่การทำความเข้าใจเกี่ยวกับ r_{XY} = 0.00 ยังสับสนหาตำราอ่านยาก และตำราที่กล่าวถึงเรื่องนี้ก็เขียนอย่างไม่กระจ่าง ยิ่งไปกว่านั้น เมื่อสมการเชิงเส้นสองตัวแปรอยู่ในรูป Y = (0)x + a หรือ Y = a เช่น Y = 3 การศึกษาหาความรู้ยิ่งเกิดความคับข้องใจ จึงเป็นที่มาของบทความนี้ ที่ต้องการชี้ให้เห็นคุณค่าของ r_{XY} กรณีที่มีค่าเท่ากับ 0.00 เพราะในตำราทั่ว ๆ ไป มักจะไม่ได้กล่าวถึงในรายละเอียดต่าง ๆ เหล่านี้

สาระลึกซึ้งในกรณีที่ค่า r_{XY} = 0.00

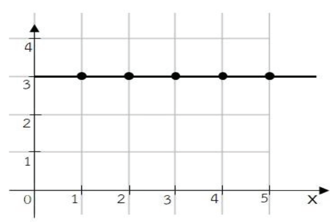
การเรียนรู้สาระเกี่ยวกับ r_{XY} ครั้งนี้ต้องการเน้นให้เกิดความเข้าใจเป็นการเฉพาะ เมื่อคำนวณได้ค่า r_{XY} = 0.00 หรือไม่สามารถคำนวณได้ **เพราะตัวส่วนของสูตรหาค่า r_{XY} เท่ากับ 0** หรือเมื่อสมการเชิงเส้นสองตัวแปรอยู่ในรูปทั่วไป คือ Ax + By + C = 0 **แล้ว A หรือ B ตัวใดตัวหนึ่ง มีค่าเท่ากับ 0** หรือเมื่อเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการพยากรณ์ จะได้เป็น **Y = (0)x + a** หรือ **Y = a** และ **x = (0)Y + a** หรือ **X = a** (สมนึก ภัททิยธนี, 2555) ซึ่งมีลำดับขั้นตอนในการอธิบายแบ่งเป็น 5 ข้อ ดังนี้

ข้อ 1 ลองพิจารณาตัวอย่างกราฟต่อไปนี้ทั้ง 4 รูป ซึ่งมาจากคู่อันดับ ที่ทำให้ค่า r_{XY} = 0.00 เสมอ ดังนี้

1.1) มีแกนสมมาตร 1 แกน ดังกราฟรูปที่ 1 และ 2

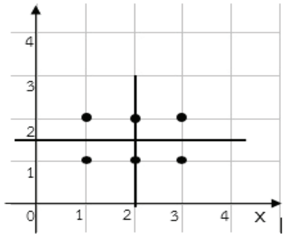


รูปที่ 1

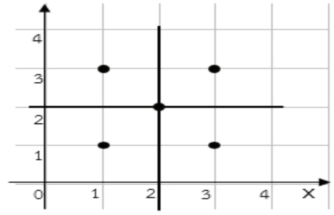


รูปที่ 2

1.2) มีแกนสมมาตร 2 แกน ดังกราฟรูปที่ 3 และ 4



รูปที่ 3



รูปที่ 4

ข้อ 2 การคำนวณหาค่า r_{XY} กรณีที่ $r_{XY} = 0.00$ ตามกราฟรูป 1-4 ในข้อ 1

2.1) ตัวอย่างเมื่อนำคู่อันดับของกราฟรูปที่ 1 มาคำนวณ ค่า $r_{XY} = 0.00$ ดังนี้

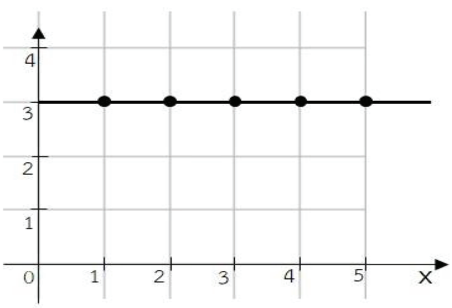
X	Y	XY	X^2	Y^2
1	1	1	1	1
1	3	3	1	9
2	2	4	4	4
2	4	8	4	16
3	1	3	9	1
3	3	9	9	9

$$r_{XY} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\left[N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2\right]\left[N\sum Y^2 - \left(\sum Y\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{(6\times 28)-(12\times 14)}{\sqrt{\left[(6\times 28)-(12)^2\right]\left[(6\times 40)-(14)^2\right]}}$$

$$= \frac{168-168}{\sqrt{[168-144][240-196]}} = \frac{0}{\sqrt{(24\times 44)}} = 0.00$$

2.2) ตัวอย่างเมื่อนำคู่อันดับของกราฟรูปที่ 2 มาคำนวณ **จะเกิดปัญหา ดังนี้**



X	Y	XY	X^2	Y^2
1	3	3	1	9
2	3	6	4	9
3	3	9	9	9
4	3	12	16	9
5	3	15	25	9
15	**15**	**45**	**55**	**45**

$$r_{XY} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\left[N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2\right]\left[N\sum Y^2 - \left(\sum Y\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{(5\times45)-(15\times15)}{\sqrt{[(5\times55)-(15)^2][(5\times45)-(15)^2]}}$$

$$= \frac{225-225}{\sqrt{[275-225][225-225]}} = \frac{0}{\sqrt{[50][0]}}$$

$= \boxed{?}$ .... **ปัญหาคือ เมื่อตัวส่วนเป็น 0 ไม่ได้ แล้วจะหาทางออกอย่างไร**

ผลคำนวณเป็นเช่นนี้แสดงว่า ถ้า**คู่อันดับอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันที่ขนานกับแกน X หรือ แกน Y** เพียง 1 แกน ไม่สามารถคำนวณหาค่า r_{XY} ได้ตามตัวอย่างข้อ 2.2 (หรือกล่าวว่าเป็นข้อยกเว้นที่จะคำนวณหาค่า r_{XY} ได้ไหม ?) ต่างกับข้อ 2.1 ที่ยังแสดงการหาค่า r_{XY} = 0.00 ได้ แม้จะมีแกนสมมาตรเพียง 1 แกนเช่นเดียวกัน แต่คู่อันดับทุกคู่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

2.3) เมื่อนำคู่อันดับของกราฟรูปที่ 3 และ 4 ซึ่งมีลักษณะตามกราฟรูปที่ 1 มาคำนวณ ค่า r_{XY} = 0.00 เช่นกัน ดังนี้

รูปที่ 3 $$r_{XY} = \frac{(6\times18)-(12\times9)}{\sqrt{[(6\times28)-(12)^2][(6\times15)-(9)^2]}}$$

$$r_{XY} = \frac{108-108}{\sqrt{[168-144][90-81]}} = \frac{0}{\sqrt{[24][9]}} = 0.00$$

รูปที่ 4 $$r_{XY} = \frac{(5\times20)-(10\times10)}{\sqrt{[(5\times24)-(10)^2][(5\times24)-(10)^2]}}$$

$$= \frac{100-100}{\sqrt{[120-100][120-100]}} = \frac{0}{20} = 0.00$$

สรุป การแสดงหาค่า r_{XY} = 0.00 (ดังตัวอย่างของกราฟในรูปที่ 1, 3 และ 4) สามารถแสดงให้เห็นจริงได้ **ยกเว้นเมื่อคู่อันดับอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันเพียง 1 เส้นที่ขนานกับ แกน X หรือ แกน Y** ดังตัวอย่างกราฟรูปที่ 2 ใช่หรือไม่ ?

ข้อ 3 ขั้นถัดไปหลังจากคำนวณหาค่า r_{XY} แล้ว ลองสร้างสมการพยากรณ์จากกราฟรูปที่ 1 คือหาค่า b และ a ของสมการพยากรณ์ คือ $Y = bX + a$ จากสูตรดังนี้ (หรือเท่ากับตรวจสอบ ว่าเส้นกราฟที่กำหนดขึ้นตรงกับค่าคำนวณเพื่อสร้างเป็นสมการพยากรณ์ได้ตรงกันหรือไม่)

สูตร
$$b = \frac{\text{เศษ } r_{XY}}{\text{เศษ } S^2} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}$$
$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

ตัวอย่างการคำนวณสูตรแบบที่ 1

จากตัวอย่างนี้ แสดงให้เห็นว่าวิธีการหา b และ a **ใช้สูตรผิด ทั้ง 2 สูตร**

แทนค่า : $b = \frac{\text{เศษ } r_{XY}}{\text{เศษ } S^2} = \frac{(6\times 28)-(12\times 14)}{(6\times 28)-(12)^2} = \frac{168-168}{168-144} = \frac{0}{24} = 0$

สูตร $a = \overline{Y} - b\overline{X}$

แทนค่า : $a = \frac{14}{6} - (0)\frac{12}{6} = 2.33$

ดังนั้น สมการพยากรณ์ คือ $\boxed{\mathbf{Y = (0)X + 2.33} \text{ หรือ } Y = 2.33}$

จะเห็นว่า เป็นสมการที่ผิด ทั้งตัวแปรและค่าที่คำนวณได้

จากรูปสมการนี้ต้องผิดแน่นอน เพราะ แกนสมมาตรของกราฟรูปที่ 1 ตัดแกน $X = 2$ แต่คำนวณได้ค่า a = 2.33 (คือค่าไม่ตรงกัน)

ตัวอย่างการหาค่า b และ a ที่ถูกต้อง เมื่อมีสมการเพียง 1 แกนที่ขนานกับแกน Y ดังรูปที่ 1 หน้า 22

ตัวอย่างการคำนวณสูตรแบบที่ 2

คือสูตรหาค่า b ต้องสลับกันระหว่างตัวเศษกับตัวส่วน ดังนี้

สูตร $b = \frac{\text{เศษ } S^2}{\text{เศษ } r_{XY}} \quad \frac{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}{N\sum XY - \sum X \sum Y}$ เพราะแกนสมมาตรขนานกับแกน Y

แทนค่า : $b = \frac{(6 \times 28) - (12)^2}{(6 \times 28) - (12 \times 14)} = \frac{168-144}{168-168} = \frac{24}{0} = 0$

แทนค่า: $a = \overline{X} - b\overline{Y}$ .... ต้องสลับตำแหน่งกันระหว่าง $\overline{X}$ กับ $\overline{Y}$ เพราะแกนสมมาตรขนานกับแกน Y

$= \frac{12}{6} - (0)\frac{14}{6}$

$= 2 - (0)(2.33) = \boxed{2}$

ดังนั้น สมการพยากรณ์ คือ $X = (0)\,Y + 2$

หรือ $X = 2$ เพราะ X เป็นตัวแปรเกณฑ์ แปลว่า Y มีค่าเป็นเท่าไรก็ได้ ส่วน X = 2 เสมอ (คือ สลับกันทำให้ Y เป็นตัวพยากรณ์)

สรุปได้ว่าถูกต้องทุกขั้นตอน เพราะแกนสมมาตรของรูปกราฟกับค่าที่คำนวณตรงกัน คือ x = **2**

ข้อสังเกต จากตัวอย่างนี้กราฟของรูปที่ 1 คู่อันดับไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันแต่มีแกนสมมาตรเพียง 1 แกนที่ขนานกับแกน Y สูตรการหาค่า b ต้องสลับกันเป็น $\frac{\text{เศษ } S^2}{\text{เศษ } r_{XY}}$ และสูตรหาค่า a ต้องเปลี่ยนเป็น $a = \overline{X} - b\overline{Y}$ (ตัวอย่างการคำนวณหาค่า b กับ a ในตำราทั่วไปมักใช้กับแกนสมมาตรของคู่อันดับที่ขนานกับแกน X เสมอ)

ในเรื่องเดียวกันนี้หากโจทย์กำหนดเฉพาะคู่อันดับมาให้ 6 คู่ (ตามกราฟรูปที่ 1 หน้า 22) แล้วให้ผู้เรียนคำนวณหาค่า r_{XY} และสร้างสมการพยากรณ์ด้วย

ประการแรก การคำนวณจะได้ $r_{XY} = 0.00$ แน่นอน

ประการที่สอง สร้างสมการพยากรณ์ ดังนั้นขั้นถัดมา คือ การหาค่า b และ a **โดยต้องเลือกใช้สูตรอย่างระมัดระวัง** ว่าจะใช้สูตรแบบใด จาก 2 แบบดังนี้

สูตรแบบที่ 1 : b = $\frac{\text{เศษ } r_{XY}}{\text{เศษ } S^2}$ คือ b = $\frac{N\sum XY-\sum X\sum Y}{N\sum X^2-(\sum X)^2}$ และสมการหาค่า a คือ a = $\bar{Y}-b\bar{X}$ ดัง ที่กล่าวอยู่ในตำราทั่วไป (เพราะนิยมที่จะอธิบายกรณีแกนสมมาตรของคู่อันดับขนานกับแกน X)

สูตรแบบที่ 2 : b = $\frac{\text{เศษ } S^2}{\text{เศษ } r_{XY}}$ คือสลับกันระหว่างตัวเศษกับตัวส่วน จึงเป็น b = $\frac{N\sum X^2-(\sum X)^2}{N\sum XY-\sum X\sum Y}$ ส่วนสูตรการหาค่า a ต้องสลับตำแหน่งกันระหว่าง $\bar{X}$ กับ $\bar{Y}$ คือ a = $\bar{X}-b\bar{Y}$ **สูตรลักษณะเช่นนี้ยังไม่เคยปรากฏให้เห็นในตำราทั่วไป คือ แกนสมมาตรของคู่อันดับขนานกับแกน Y**

แต่ไม่มีสิ่งใดหรือข้อมูลใด ๆ ใช้เป็นหลักในการเลือกใช้สูตร เมื่อเป็นเช่นนี้ต้องเลือกใช้สูตรหาค่า b และ a ให้ถูกต้อง (เพราะโจทย์กำหนดเฉพาะคู่อันดับ 6 คู่ เท่านั้น)

ดังนั้นวิธีการที่ดี คือ ต้องลองนำคู่อันดับจากโจทย์ (6 คู่อันดับ) มาเขียนกราฟลงในพิกัดฉากเช่นตัวอย่างนี้ จาก 6 คู่อันดับ พบว่าแกนสมมาตรมี 1 แกน ขนานกับแกน Y นั่นคือ การเลือกใช้สูตรหาค่า b และ a ต้องใช้แบบที่ 2 ดังตัวอย่างการคำนวณในกรอบสี่เหลี่ยมสูตรแบบที่ 2 ซึ่งค่า b และ a ที่คำนวณได้กับกราฟรูปที่ 1 จะตรงกัน คือ b=0, a=2 ดังนั้นสมการพยากรณ์ คือ x = 2 (ไม่ใช่เลือกใช้สูตรผิดตั้งแต่แรก แล้วได้สมการพยากรณ์ผิดเป็น Y = 2.33 ซึ่งได้ค่าไม่ตรงค่าของแกนสมมาตร คือ 2 ดังตัวอย่างในกรอบสี่เหลี่ยมสูตรแบบที่ 2 ที่ผ่านมาและต้อง**ไม่ลืมว่าเป็นกรณีค่า** r_{XY} **= 0.00**)

ถ้าจะพูดให้ลึกซึ้งไปอีกขั้นหนึ่ง ก็คือกรณีค่า $r_{XY} \neq 0.00$ หรือ ส.ป.ส. ของ X และ Y ไม่เท่ากับ 0 (A หรือ B ≠ 0) คือ คู่อันดับจะมีความสัมพันธ์เชิงบวกหรือเชิงลบ การเลือกใช้สูตรหาค่า b และ a เพื่อสร้างสมการพยากรณ์ สามารถใช้ได้ทั้ง 2 แบบ **แต่พึงระวังจะเลือกใช้สูตรผิด** เช่น มีคู่อันดับ 5 คู่ ดังนี้ (2, -1), (2, 1), (4, 3), (6, 5) และ (6, 7) เมื่อนำไปหาค่าต่าง ๆ เพื่อจะใช้ในสูตรหาค่า b และ a ผลเป็นดังนี้ (ในทีนี้ไม่ได้แสดงการคำนวณหาค่า r_{XY})

$\sum X = 20$, $\sum Y = 15$, $\sum XY = 84$, $\sum X^2 = 96$, และ $\sum Y^2 = 75$

ส่วนการสร้างสมการพยากรณ์ สามารถทำได้ทั้ง 2 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1 ถ้าค่า X พยากรณ์ค่า Y การใช้สูตรหาค่า b และ a จะเป็นดังนี้ (แบบที่ 1 นี้มีกล่าวอยู่ในตำรา หรือในการเรียนการสอนเพราะ ในทางสถิติจะกำหนดให้ X พยากรณ์ Y)

$$b = \frac{\text{เศษ } r_{XY}}{\text{เศษ } S^2} = \frac{(5\,x\,84)-(20\,x\,15)}{(5\,X\,96)-(20)^2} = \frac{120}{80} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$a = \bar{Y}-b\bar{X} = \frac{15}{5} - \left(\frac{3}{2} \times \frac{20}{5}\right) = 3 - 6 = \boxed{-3}$$

ดังนั้นสมการพยากรณ์คือ $\boxed{Y = \frac{3}{2}x - 3}$

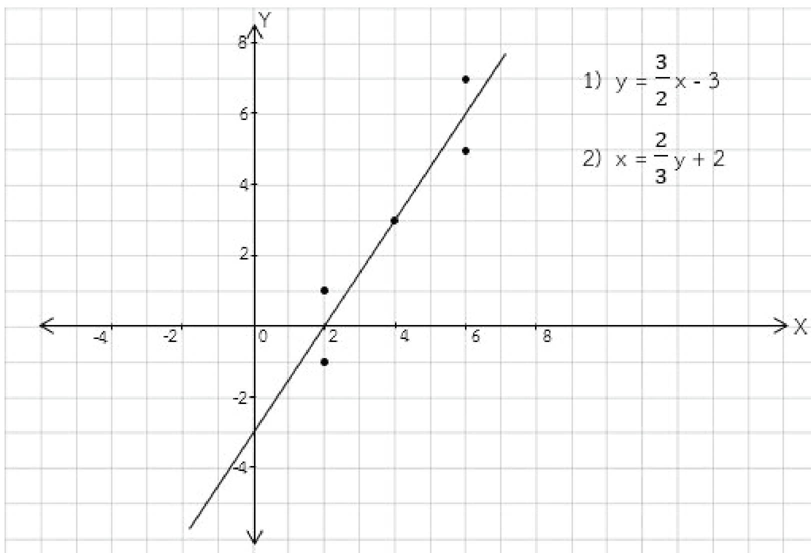
แบบที่ 2 ถ้าค่า Y พยากรณ์ค่า X (แบบที่ 2 นี้ จะไม่ปรากฏให้เห็นในตำราหรือในการเรียนการสอน แต่เป็นองค์ความรู้ที่ควรจะได้รับทราบ)

$$b = \frac{\text{เศษ } S^2}{\text{เศษ } r_{XY}} = \frac{(5 \, x \, 96) - (20)^2}{(5 \, X \, 84) - (20 \, x \, 15)} = \frac{80}{120} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$a = \overline{X} - b\overline{Y} = \frac{20}{5} - \left(\frac{2}{3} \times \frac{15}{5}\right) = 4 - 2 = \boxed{2}$$

ดังนั้นสมการพยากรณ์คือ $\boxed{X = \frac{2}{3}Y + 2}$

เพื่อให้เกิดความเข้าใจอย่างกระจ่าง จึงนำคู่อันดับและเส้นกราฟที่เกิดจากสมการพยากรณ์ทั้ง 2 แบบ เขียนลงในพิกัดฉากได้ดังนี้



2. ถ้ากราฟของคู่อันดับไม่ได้อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน แต่มีแกนสมมาตร 2 แกน ที่ขนานทั้งแกน X และแกน Y การคำนวณจะได้ค่า r_{XY} = 0.00 ส่วนการสร้างสมการขั้นที่ใช้สูตรหาค่า b ต้องเลือกใช้ให้ถูก และ**สูตรการหาค่า a ต้องคล้อยตามด้วย** ดังตัวอย่างเมื่อหาค่า r_{XY} ของรูปที่ 3 (หน้า 22) ซึ่งมีแกนสมมาตร 2 แกน คำนวณได้ r_{XY} = 0.00 ส่วนการหาค่า b และ a เพื่อสร้างสมการพยากรณ์ โดยใช้สูตรหาค่า b และค่า a **พบว่าสามารถทำได้ ทั้ง 2 แบบ คือ**

แบบที่ 1 เมื่อแกนสมมาตรขนานกับแกน X *(X พยากรณ์ Y)*

สูตร $b = \dfrac{\text{เศษ } r_{XY}}{\text{เศษ } S^2} = \dfrac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{N\sum X^2 - (\sum X)^2} = \dfrac{(6\ x\ 18) - (12\ x\ 9)}{(6\ X\ 28) - (12)^2}$

$= \dfrac{108 - 108}{168 - 144} = \dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{24}} = 0$

สูตร $a = \overline{Y} - b\overline{X} = \dfrac{9}{6} - (0)\dfrac{12}{6} = \dfrac{3}{2} = \boxed{1.5}$

ดังนั้นสมการพยากรณ์คือ Y = **(0)n + 1.5 หรือ** Y = **1.5**

แบบที่ 2 เมื่อแกนสมมาตรขนานกับแกน Y *(Y พยากรณ์ X)*

สูตร $b = \dfrac{\text{เศษ } S^2}{\text{เศษ } r_{XY}} = \dfrac{24}{0} = 0$

สูตร $a = \overline{X} - b\overline{Y} = \dfrac{12}{6} - (0)\dfrac{9}{6} = \boxed{2}$

ดังนั้นสมการณ์พยากรณ์คือ X = (0)Y + 2 **หรือ** X = 2

สรุปว่า ถูกทั้ง 2 แบบ จึงสามารถใช้สูตรแบบที่ 1 หรือแบบที่ 2 ก็ได้ เพื่อสร้างสมการพยากรณ์ เช่น จากกราฟรูปที่ 3 จะได้สมการพยากรณ์เป็น Y = *(0)*x + 1.5 หรือ x = *(0)*Y + 2

3. การสร้างสมการพยากรณ์ แม้ $r_{XY} = 0.00$ ในเชิงสถิติสามารถสร้างได้เสมอ เพราะพยากรณ์ได้ตลอดไป (เช่น Y = 3 แปลว่า X เป็นจำนวนใด ๆ ก็ได้ ค่า Y = 3 ทุกครั้ง) แต่ในเชิงวิจัย นักวิจัยจะสร้างสมการพยากรณ์ได้หรือไม่ ต้องทำการทดสอบนัยสำคัญทางสถิติของค่า r_{XY} ที่คำนวณได้เป็นเบื้องต้น (นิยมตั้งค่า α ที่ .05 หรือ .01*)* ถ้ามีนัยสำคัญทางสถิติ ก็จะสร้างสมการพยากรณ์ โดยการคำนวณหาค่า b และ a ดังกล่าว

ข้อ 4 ถ้าลองสร้างสมการพยากรณ์จากกราฟรูปที่ 2 (หน้า 22) ทั้ง ๆ ที่ ไม่สามารถหาค่า r_{XY} ได้ (เพราะคู่อันดับทุกคู่อยู่ในเส้นตรงเดียวกันที่ขนานกับแกน X เพียง 1 แกน มีผลทำให้เมื่อแทนค่าแล้ว**ตัวส่วน**ตามสูตร r_{XY} มีค่าเป็น 0 ดังได้กล่าวมาแล้วในข้อ 2 หน้า 23) ก็สามารถสร้างสมการพยากรณ์ได้ โดยเริ่มต้นจากการหาค่า b และ a ดังนี้ (ข้อมูลต่าง ๆ ของรูปที่ 2 อยู่ในหน้า 23)

$$b = \frac{\text{เศษ } r_{XY}}{\text{เศษ } S^2} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}$$

$$= \frac{(5\times 45)-(15\times 15)}{(5\times 55)-(15)^2} = \frac{225-225}{275-225} = \frac{0}{50} = 0$$

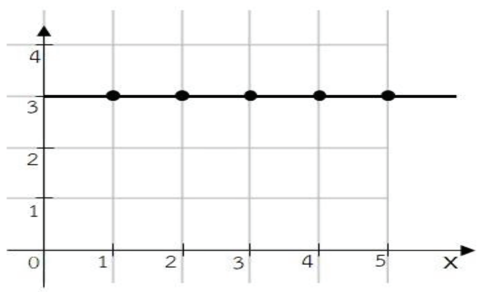
$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

$$= 3 - (0)3 = 3$$

ดังนั้น $Y = bx + a = (0)X + 3$

$$\boxed{\text{หรือ } Y = 3}$$

จากสมการพยากรณ์ในข้อนี้คือ $Y = (0)X + 3$ หรือ $Y = 3$ เมื่อย้อนกลับมาเขียนกราฟ จะได้กราฟเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ระยะ 3 หน่วยตรงกับกราฟรูปที่ 2 หน้า 22 (คือ X มีค่าเท่าไรก็ได้ โดยค่า $Y = 3$ เสมอ จึงเป็นเส้นตรงดังกล่าว)



ข้อ 5 ข้อสงสัยของสมการพยากรณ์ในรูป $Y = 3$ หรือ $Y = (0)X + 3$ ดังตัวอย่างสมการและกราฟในข้อ 5 นี้ **จะอธิบาย (0)X ว่าอย่างไรจึงจะเข้าใจได้อย่างดี** การให้เหตุผลว่า ค่า X เป็นเท่าไรก็ได้ เมื่อคูณกับ ส.ป.ส. ของ x ซึ่งเป็น 0 ผลคูณจึงได้ 0 เสมอ ทำให้ Y = 3 ตลอดเวลา หรือผู้เรียนอาจจะสงสัยต่อไปอีกว่าแล้ว ส.ป.ส. ของ X เป็น 0 ได้อย่างไร **ในเรื่องนี้ ยังไม่มีตำราเล่มใดอธิบายให้กระจ่าง เพราะโดยเหตุผลของเรื่องนี้ เป็นที่ทราบกันแล้วว่า ส.ป.ส. ของ X จะตรงกับอัตราส่วนของค่าบนแกน Y ต่อค่าบนแกน X** ของรูปกราฟ

เรื่องนี้ถือเป็นปัญหาสำคัญเกี่ยวกับการทำความเข้าใจ โดยเฉพาะ เมื่อมีการเรียนการสอนสมการในรูป ที่ Y = 3 หรือ Y = (0)X+3 ทั้งผู้เรียนระดับมัธยม หรือระดับนิสิต นักศึกษา ก็จะสับสนไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ ผู้เขียนจึงขออธิบายเพื่อให้เกิดความเข้าใจอย่างถ่องแท้ ดังนี้

เนื่องจากรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ $\mathbf{Ax+By+C=0}$ เมื่อ A, B และ C เป็นตัวคงที่ โดย A กับ B **ไม่เท่ากับ 0 พร้อมกัน** (ถ้า A = 0 ค่า B จะเป็น 0 ไม่ได้ หรือ ถ้า B = 0 ค่า A จะเป็น 0 ไม่ได้) และเมื่อเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการพยากรณ์ ผู้เรียนมักจะเกิดความสับสน เพื่อความกระจ่างในเรื่องนี้ จึงต้องแยกอธิบายเป็น 4 กรณี ดังนี้ (กรณีที่ 4 จะทำความเข้าใจได้ยาก)

กรณีที่ 1 ถ้า A, B และ C $\neq$ 0

เมื่อเปลี่ยนสมการทั่วไปให้เป็นสมการพยากรณ์ จะได้ดังนี้

จาก $Ax+By+C = 0$

$$By = -Ax-C$$

$$y = -\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

$\boxed{\mathbf{y} = bx+a}$ .... เมื่อให้ $b = -\frac{A}{B}$, $a = -\frac{C}{B}$

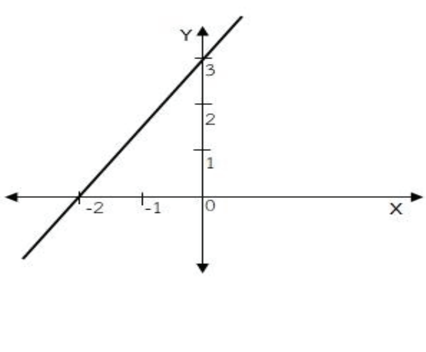
ตัวอย่างของสมการที่เป็นจริง แล้วปรับให้เป็นสมการพยากรณ์จะได้ ดังนี้

จาก $-3x+2y-6 = 0$

$$2y = 3x+6$$

$\boxed{y = \frac{3}{2}x+3}$ .... (ความสัมพันธ์เชิงบวกเพราะ ส.ป.ส. ของ X เป็นบวก)

เมื่อนำคู่อันดับของสมการมาเขียนกราฟ จะเป็น ดังนี้

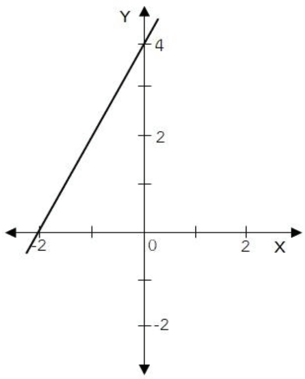


จากสมการและรูปกราฟจะเห็นว่า ส.ป.ส. ของ x หรือค่า b = $\mathbf{\frac{3}{2}}$ หรือความชัน (slope) จะตรงกับอัตราส่วนของค่าบนแกน Y *(คือ 3)* ต่อค่าบนแกน x (คือ 2 ซึ่งเป็นเรื่องของระยะทาง จึงต้องใช้ค่าสมบูรณ์ของ –2)

พิจารณาจากอีกตัวอย่างหนึ่ง พร้อมกับเขียนกราฟ จะเป็นดังนี้

จาก $-4x + 2y - 8 = 0$

$Y = 2x + 4$



จากกราฟจะเห็นว่า ค่า b = $\frac{\text{ค่าบนแกน } \mathbf{Y}}{\text{ค่าบนแกน } \mathbf{X}} = \frac{4}{2} = 2$

จะตรงกับ ส.ป.ส. ของ x ในสมการ $Y = 2x + 4$ คือ 2

หมายเหตุ ตัวอย่างนี้ต้องการชี้ให้เห็นว่าตำแหน่งที่เส้นกราฟตัดแกนY (ตัดที่ 4) ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวเลขตัวเดียวกับ ส.ป.ส.ของ x คือ 2 (แต่อัตราส่วนของความชันเท่ากัน คือ $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$)

กรณีที่ 2 ถ้า A หรือ B $\neq$ 0 แต่ C = 0

เมื่อเปลี่ยนสมการทั่วไปให้เป็นสมการพยากรณ์ จะได้ดังนี้

จาก $Ax + By + 0 = 0$

$By = - Ax$

$y = \frac{A}{B}X$

$\boxed{y = bx}$ .... เมื่อให้ $b = -\frac{A}{B}$

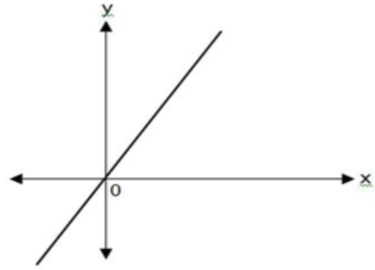
ตัวอย่างของสมการที่เป็นจริง แล้วปรับให้เป็นสมการพยากรณ์ จะได้ดังนี้

จาก $-3x + 2y = 0$

$2y = 3x$

$\boxed{y = \frac{3}{2}X}$

จะเห็นว่า จากสมการพยากรณ์นี้ยังมีความชัน เช่นเดิม (คืออัตราส่วน 3:2) เพียงแต่**เส้นกราฟจะตัดแกน Y ที่จุดกำเนิด (0,0)** ดังรูปนี้ (ถ้า Y = X เส้นกราฟจะทำมุม 45 ° กับแกน X ในทางทวนเข็มนาฬิกา)



กรณีที่ 3 ถ้า A หรือ B = 0 และ C = 0 ด้วย

เมื่อเปลี่ยนสมการทั่วไปให้เป็นสมการพยากรณ์ จะได้ดังนี้ (กำหนดให้ A = 0)

$$\text{จาก} \quad (0)x + By + 0 = 0$$
$$y = -(0)x + 0$$
$$\boxed{y = 0}$$

จะเห็นว่า แม้ A = 0 และ C = 0 ก็สามารถสร้างสมการพยากรณ์ได้คือ y = 0 แปลว่า x มีค่าเป็นเท่าไรก็ได้ แต่ y = 0 เสมอ หรืออีกนัยหนึ่งเส้นกราฟคือแกน X และถ้า X = 0 เส้นกราฟคือแกน Y แสดงว่าไม่มีความชัน (slope)

กรณีที่ 4 ถ้า A หรือ B = 0 แต่ C $\neq$ 0

กรณีเช่นนี้ เส้นกราฟจะขนานกับแกน X (เมื่อ A = 0)หรือจะขนานกับแกน Y (เมื่อ B = 0) หรือกล่าวได้ว่า เส้นกราฟจะไม่ตัดทั้งสองแกนพร้อมกัน ดังนั้น เส้นกราฟลักษณะนี้ **จะไม่เกี่ยวกับค่าของอัตราส่วนค่าบนแกน Y ต่อค่าบนแกน X** หรือจะไม่มีความชัน (slope) เช่นเดียวกับกรณีที่ 3 ตัวอย่างสมการ ได้แก่ y = 3 ไม่ได้แปลว่าค่าบนแกน y = 3 แล้วมีผลทำให้ค่าบนแกน X เป็น 0 หรือ x มีค่าเป็นเท่าไรก็ได้ **แท้ที่จริงแล้วเกิดจากการกำหนดให้ A = 0 จึงจะเป็นเหตุผลที่ถูกต้อง**

ตัวอย่างในที่นี้จะกำหนดให้ A = 0 แล้วลองยกตัวอย่างสมการที่เป็นจริง ดังนี้

$$\text{จาก} \quad Ax + By + C = 0$$
$$(0)x - 4y + 12 = 0$$
$$4y = (0)x + 12$$

	y =	$\frac{(0)x}{4} + 3$	.... (1)
หรือ	**y =**	$(0)x + 3$	.... (2)
หรือ	**y =**	3	.... (3)

จากสมการพยากรณ์ที่ (1), (2) และ (3) จะเห็นว่าการใช้ **สมการที่ (1) อธิบายจะให้เข้าใจได้ง่ายกว่า** กล่าวคือ x มีค่าเป็นเท่าไรก็ได้ รวมทั้ง x = 0 ด้วย ก็จะได้ ค่า y = 3 เสมอ เพราะ ส.ป.ส. ของ**ตัวเศษ** (ของ x) คือ A = 0 แต่ ส.ป.ส. ของ**ตัวส่วน** (ของ y) คือ B = 4 เสมอ การอธิบายเช่นนี้ มักจะไม่ปรากฏให้เห็นในเอกสาร ตำรา ทั่ว ๆ ไป หรือรวมทั้งการจัดการเรียนในเรื่องกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในระดับมัธยมศึกษาด้วย ส่วนตัวอย่างรูปกราฟ เมื่อ Y = 3 คือ กราฟรูปที่ 2

นั่นคือ ไม่ควรอธิบายให้นักเรียนหรือนิสิตฟัง โดยใช้เฉพาะสมการที่ (2) หรือ (3) เท่านั้น เพราะเข้าใจยาก ต้องอธิบายโดยเรียงลำดับจากสมการที่ 1, 2 และ 3 หรืออาจจะอธิบายเพิ่มเติมโดยอาศัยอีกสมการหนึ่ง ดังนี้

จาก $AX + BY + C = 0$

ถ้า $A = 0$: $(0)X + BY + C = 0$

$$BY = -(0)X - C$$

$$\boxed{Y = \frac{-(0)x}{B} - \frac{C}{B} \quad \text{.............................. (4)}}$$

จากสมการที่ 4 จะเห็นว่าค่า x จะเป็นตัวเลขอะไรก็ได้รวมถึง 0 ด้วย **แต่ค่า B จะไม่มีโอกาสเป็น 0** (เพราะกำหนดให้ A = 0 แล้ว B จะเป็น 0 พร้อมกันไม่ได้)

สรุปว่าในโอกาสที่สมการเป็นเช่นนี้ คือกรณีที่ 4 ดังตัวอย่าง y = 3 (หรือ x = 2 ที่มาจากสมการ $X = \frac{-(0)y}{A} - \frac{C}{A}$) แล้ว อธิบายด้วยสมการที่ (4) อีกสมการหนึ่ง จะช่วยให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น และ**ควรเน้นเฉพาะการเปลี่ยนสมการทั่วไปให้เป็นสมการพยากรณ์** โดยไม่เกี่ยวกับ ค่า b ที่มาจากค่าบนแกน y : ค่าบนแกน x **ซึ่งสืบเนื่องมาจาก A หรือ B ค่าใดค่าหนึ่ง มีค่าเท่ากับ 0 ดังกรณีที่ 3 หรือ 4 หรืออีกนัยหนึ่งคือรูปกราฟจะไม่มีความชัน (slope)**

ก่อนจบบทความเรื่องนี้ ผู้ที่ศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงเส้นจะต้องเข้าใจความคิดรวบยอด (concept) ใน 4 ประเด็นต่อไปนี้ด้วย จึงจะถือได้ว่าเป็นการศึกษาเรื่องนี้อย่างสมบูรณ์

1) ถ้าเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น แปลว่า r_{XY} = 1.00 หรือ -1.00

2) ถ้าเป็นความสัมพันธ์เชิงบวกหรือเชิงลบ **ไม่จำเป็น**ต้องสัมพันธ์เชิงเส้น เพราะค่า $r_{XY} \neq 1.00$ หรือ -1.00 แต่สามารถสร้างเป็น**สมการเชิงเส้น**ได้ ซึ่งเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า **สมการพยากรณ์**

3) แม้**ไม่มีความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์** คือ r_{XY} = 0.00 ก็สามารถสร้างให้เป็นสมการเชิงเส้นหรือสมการพยากรณ์ได้

4) ถ้านำคู่อันดับของสมการเชิงเส้นมาเขียนกราฟ จะเป็นเส้นตรงเสมอ และเส้นกราฟจะมีความชัน (Slope) ก็ต่อเมื่อ ส.ป.ส. ของตัวแปร X หรือ Y ไม่เท่ากับ 0 ส่วนตัวคงที่หรือค่า C ของสมการในรูปทั่วไป จะเป็น 0 หรือไม่ก็ได้

เอกสารอ้างอิง

บุญชม ศรีสะอาด และคณะ. (2555). *วิธีการทางสถิติสำหรับการวิจัย.* พิมพ์ครั้งที่ 6. มหาสารคาม : คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.

สมนึก ภัททิยธนี. (2562). *การวัดผลการศึกษา.* พิมพ์ครั้งที่ 13. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.

สมนึก ภัททิยธนี. (2555). *คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* พิมพ์ครั้งที่ 1 กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์,

สมนึก ภัททิยธนี. (2559). สิ่งที่น่ารู้เกี่ยวกับ r_{XY}. *วารสารการวัดผลการศึกษา มหาวิทยาลัยมหาสารคาม, 22*(2), 3–16.