

ปกิณกะ

การทดสอบไฮเทลลิ่งทีสแควร์ Hotelling T^2

ดร.ทรงศักดิ์ ภูสีอ่อน*

ในการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม นักวิจัยสามารถใช้สถิติอ้างอิงทดสอบสมมุติฐานได้ ซึ่งหากการทดสอบนั้นมีตัวแปรตามเพียง 1 ตัว นักวิจัยสามารถใช้สถิติทดสอบที (t-test) เพื่อตอบคำถามดังกล่าวได้ แต่ในกรณีที่ผู้วิจัยต้องการทดสอบหรือเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากรโดยศึกษาตัวแปรตามมากกว่า 1 ตัว ซึ่งเป็นตัวแปรที่สัมพันธ์กันนั้น การใช้สถิติที่แยกทดสอบทีละตัวแปร (Univariate Test) จะทำให้โอกาสของการเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (Type I Error) เพิ่มขึ้น การทดสอบเพื่อลดความเสี่ยงของการเกิดความคลาดเคลื่อนดังกล่าว สามารถใช้วิธีการทดสอบตัวแปรพหุคูณ (Multivariate Test) สถิติที่มีความเหมาะสมในการทดสอบคือ **การทดสอบไฮเทลลิ่งทีสแควร์ (Hotelling T^2)** ซึ่งเป็นการขยายของเขตของการทดสอบที (t-test)

หลักการของการวิเคราะห์ด้วยสถิติดังกล่าว จะมีลักษณะเช่นเดียวกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนพหุคูณ (MANOVA) นั่นคือเป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของตัวแปรตามตัวใหม่ที่ได้จากคะแนนแปลงรูปของตัวแปรตามเดิมทุกตัว (Linear Combination) โดย Hotelling T^2 จะเป็นกรณีพิเศษของการวิเคราะห์ตัวแปรพหุคูณ ซึ่งมีความเหมาะสมในกรณีที่เปรียบเทียบ 2 กลุ่มเท่านั้น

* อาจารย์ประจำภาควิชาวิจัยและพัฒนาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

ลักษณะตัวแปรของการวิเคราะห์ด้วย Hotelling T^2

1) ตัวแปรตาม (Dependent Variable) ต้องเป็นตัวแปรต่อเนื่อง (Continuous) จัดอยู่ในมาตราการวัดตั้งแต่อันตรภาค (Interval Scale) ขึ้นไป และมีจำนวนตั้งแต่ 2 ตัวแปรขึ้นไป ซึ่งเป็นตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กัน

2) ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) เป็นตัวแปรแบ่งกลุ่ม (Categories) หรืออยู่ในมาตรานามบัญญัติ (Nominal Scale) หรือถ้าอยู่ในมาตราที่สูงกว่านี้ ให้ปรับลงมาอยู่ในมาตรานามบัญญัติ มีจำนวน 1 ตัวแปร ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม

ตัวอย่าง

นักวิจัยต้องการศึกษาว่านักเรียนที่ได้รับวิธีสอนต่างกัน 2 วิธีนั้น จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทักษะการคิดวิเคราะห์แตกต่างกันหรือไม่ ซึ่งหากพบว่าตัวแปรตามทั้งสองตัวนั้นมีความสัมพันธ์กัน การใช้ Hotelling T^2 ทดสอบเพื่อตอบปัญหาวิจัยดังกล่าวจะมีความเหมาะสม แต่หากพบว่าตัวแปรตาม 2 ตัวนั้นไม่สัมพันธ์กันหรือเป็นอิสระจากกัน นักวิจัยสามารถแยกทดสอบตัวแปรตามทีละตัวได้ นั่นคือ เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับวิธีสอนต่างกัน 2 วิธี ซึ่งสามารถใช้ Independent samples t-test ทดสอบได้ ในทำนองเดียวกัน นักวิจัยก็จะใช้สถิติดังกล่าวเปรียบเทียบความแตกต่างทักษะการคิดวิเคราะห์ของนักเรียนที่ได้รับวิธีสอนต่างกัน 2 วิธี ด้วยนั่นเอง

ข้อตกลงเบื้องต้น

ข้อตกลงเบื้องต้นของการทดสอบไฮเทสลิงที่สแควร์ Hotelling T^2 กล่าวเป็น 3 ส่วนคือ เกี่ยวกับการแจกแจง (Distribution) , เกี่ยวกับความสัมพันธ์ (Correlation) และเกี่ยวกับความแปรปรวน (Variance) ดังนี้

1. ประชากรจะต้องมีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)
2. ตัวแปรตามจะต้องมีความสัมพันธ์เชิงเส้น (Linearity)
3. มีความเป็นเอกพันธ์ของเมตริกความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วมของประชากร (Homogeneity of Variance Covariance Matrices)

สำหรับการทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นและแนวทางการแก้ไข ของการทดสอบไฮเทสลิงที่สแควร์ไม่ขกกล่าวในที่นี้ ดังนั้นก่อนทำการทดสอบด้วยสถิติ Hotelling T^2 นักวิจัยจะต้องทำการตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นก่อนเสมอ หากมีการฝ่าฝืนข้อตกลงเบื้องต้นนักวิจัยจะต้องดำเนินการแก้ไขเพื่อให้เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นดังกล่าว สำหรับข้อตกลงที่เกี่ยวข้อง

กับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามนั้น จะเป็นการตรวจสอบเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรตามทีละคู่ ซึ่งสามารถพิจารณาได้หลายวิธี วิธีหนึ่งที่สามารถพิจารณาได้คือ Scatterplots ระหว่างตัวแปรตาม โดยแยกตามกลุ่มของตัวแปรอิสระ ซึ่งในการวิเคราะห์จะต้องทำการเลือก (Select case) หรือแบ่งไฟล์ (Split file) เพื่อแยกพิจารณาตามกลุ่ม อย่างไรก็ตาม การพิจารณาจาก Scatterplots จะบอกได้โดยคร่าว ๆ เท่านั้น โดยพิจารณาจากแนวโน้มของเส้นกราฟว่าเป็นเส้นตรงหรือไม่ (Linearity) แต่จะไม่สามารถบอกได้อย่างชัดเจน (Exactly) ผู้วิจัยยังสามารถตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามด้วยวิธีการของเพียร์สัน (Pearson) ได้ การวิเคราะห์ด้วย Hotelling T² จะมีความเหมาะสมเมื่อตัวแปรตามที่น่ามาพิจารณา มีความสัมพันธ์กัน (อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ) ถ้าตัวแปรตามดังกล่าวไม่มีความสัมพันธ์กัน ก็ควรดำเนินการวิเคราะห์ความแปรปรวนแยกตัวแปรตาม (Univariate Test) แต่การมีความสัมพันธ์กันของตัวแปรตามนี้ไม่ควรสูงเกินไป (ตั้งแต่ .80 ขึ้นไป ; Pallant, 2005 : 255) เพราะถ้ามีความสัมพันธ์ที่เข้าใกล้ 1.00 นั้นแสดงว่านักวิจัยกำลังวัดในสิ่งเดียวกันหรือเครื่องมือที่สร้างขึ้นมีความซ้ำซ้อนในการวัด ซึ่งผู้วิจัยจะต้องกลับไปพิจารณาเครื่องมือที่นำไปวัดตัวแปรตามดังกล่าว ถ้าเกิดเหตุการณ์ดังกล่าวแล้ว บางทีอาจจะต้องทำการตัดตัวแปรตามบางตัวออก (Removing) หรือรวมตัวแปรตามดังกล่าวให้เป็นตัวแปรหรือองค์ประกอบเดียวกันก่อนทำการวิเคราะห์ (Singularity) หรือหากมันใจโดยอิงทฤษฎี พบว่าตัวแปรทั้ง 2 ตัวดังกล่าวมีความเกี่ยวข้องกันแต่ไม่ได้เป็นตัวแปรเดียวกัน ผู้วิจัยอาจจะต้องพิจารณาปรับปรุงเครื่องมือวัดใหม่ และเก็บข้อมูลใหม่อีกครั้ง

การวิเคราะห์ข้อมูลด้วย Hotelling T²

ในการวิเคราะห์ข้อมูลด้วย Hotelling T² นั้น จะเป็นการขยายขอบเขตของการทดสอบที่คือจะมีลักษณะเช่นเดียวกัน แต่ศึกษาตัวแปรตามมากกว่า 1 ตัวนั่นเอง ดังนั้นสมมุติฐานศูนย์ (Null Hypothesis) จึงมีลักษณะที่แตกต่างกัน ดังนี้

กรณี t-test (Univariate Test)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (\text{ค่าเฉลี่ยประชากรเท่ากัน})$$

กรณี Hotelling T² (Multivariate Test)

$$H_0 : \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{p2} \end{pmatrix} \quad (\text{เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยประชากรเท่ากัน})$$

ดังนั้นสูตรที่ใช้ในการคำนวณ Hotelling T^2 จึงเป็นการขยายสูตรของ t-test (ศึกษาที่มาของสูตร จาก Stevens. 2002 : 176 - 177) โดยมีสูตรการคำนวณ ดังนี้

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} [\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2]' S^{-1} [\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2]$$

| | | | |
|-------|---------------------------|-----|--------------------------------|
| เมื่อ | T^2 | แทน | ค่าสถิติทดสอบ Hotelling T^2 |
| | n_1 | แทน | จำนวนกลุ่มตัวอย่างในกลุ่มที่ 1 |
| | n_2 | แทน | จำนวนกลุ่มตัวอย่างในกลุ่มที่ 2 |
| | S | แทน | เมตริกความแปรปรวนร่วม |
| | $[\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2]$ | แทน | เวกเตอร์ความต่างของค่าเฉลี่ย |

ในการทดสอบด้วยสถิติ Hotelling T^2 นั้น ผู้วิจัยจะต้องแปลงค่า T^2 ให้เป็นค่าสถิติ F เพื่อใช้ค่าวิกฤติจากการแจกแจงแบบ F เป็นเกณฑ์ในการทดสอบสมมุติฐาน โดยมีสูตร ดังนี้

$$F = \frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} T^2$$

ค่าวิกฤติ F ใช้ค่าองศาอิสระเท่ากับ p และ (N-p-1) เมื่อ p แทน จำนวนตัวแปรตาม และ N คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด (ทั้งสองกลุ่ม)

การทดสอบภายหลัง (Post Hoc Procedures) กรณีที่ Hotelling T^2 มีนัยสำคัญ

ในกรณีที่ผู้วิจัยใช้ Hotelling T^2 เปรียบเทียบความแตกต่างแล้วพบว่า มีนัยสำคัญทางสถิติ นั้นแสดงให้เห็นว่าสองกลุ่มนั้นมีเวกเตอร์ของค่าเฉลี่ยประชากรแตกต่างกัน (ดูสมมุติฐานทางสถิติ) แต่ยังใช้ประโยชน์จากผลการวิจัยได้ไม่มากนัก เนื่องจากไม่ทราบว่าแตกต่างกันที่ตัวแปรตามใด ซึ่งในประเด็นนี้ยังมีแนวคิดที่ค่อนข้างหลากหลาย นักวิชาการบางกลุ่มจะไม่ดำเนินการทดสอบภายหลังต่อ แต่บางกลุ่มที่เน้นการใช้ประโยชน์จากการวิจัยมักจะเสนอแนะให้มีการทดสอบภายหลังต่อ โดย Stevens (2002 : 181-182) ได้เสนอแนะวิธีการทดสอบภายหลังไว้ 3 วิธี ดังนี้

1) The Roy-Bose simultaneous confident interval approach ซึ่งเป็นวิธีการที่ใช้หลักการเดียวกันกับวิธีของ Scheffe' วิธีการดังกล่าวสามารถที่จะเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากรได้ (Stevens. 2002 : 181 อ้างอิงมาจาก Hummel & Sligo. 1971)

2) Univariate t's ซึ่งสามารถตอบคำถามได้ว่าทั้ง 2 กลุ่ม มีความแตกต่างกันที่ตัวแปรตามใด หากแต่การแยกทดสอบทีละตัวแปรจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (Type I Error) เพิ่มมากขึ้น ตามข้อเสนอของ Bonferroni ค่า Overall type I Error rate ในการทดสอบ จะต้องน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด ยกตัวอย่างเช่น ผู้วิจัยกำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบไว้ที่ .10 (ยอมให้เกิดความคลาดเคลื่อนร้อยละ 10) โดยมีตัวแปรตามทั้งหมด 4 ตัวแปร ผู้วิจัยจะต้องแยกทดสอบ Univariate t's จำนวน 4 ครั้ง ซึ่งในกรณีนี้ควรปรับค่าระดับนัยสำคัญของการทดสอบแต่ละครั้งเท่ากับ $.10/4 = .025$ จะสามารถควบคุมการเกิด Type I Error ที่เกินจริงได้ วิธีการนี้มักใช้ได้ดีในกรณีที่มีตัวแปรตามไม่เกิน 7 ตัวแปร (Stevens. 2002 : 181)

3) Univariate tests โดยใช้ระดับนัยสำคัญในการทดสอบแต่ละครั้งเท่าเดิม ซึ่งจะทำให้มีอำนาจในการทดสอบมากกว่า 2 วิธีแรก กล่าวคือจะมีโอกาสพบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยประชากรในแต่ละตัวแปรมากยิ่งขึ้น การใช้วิธีการดังกล่าว ผู้วิจัยอาจจะไม่คำนึงถึง Type I Error แต่มีเหตุผลหรือเชื่อว่าน่าจะมี ความแตกต่างเกิดขึ้น (ศึกษารายละเอียดจาก Stevens. 2002 : 183)

ดังนั้นเมื่อพบนัยสำคัญทางสถิติจากการทดสอบด้วย Hotelling T² แล้ว ผู้วิจัยอาจจะทดสอบภายหลังต่อ (Post Hoc Procedure) หรือไม่ก็ได้ ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการวิจัยและการใช้ประโยชน์จากการวิจัย และหากจะทำการทดสอบภายหลังก็ควรเลือกใช้วิธีการทดสอบให้มีความเหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลงานวิจัยนั้น ๆ ซึ่งเป็นหน้าที่ของผู้วิจัยในการพิจารณาให้มีความเหมาะสมและเกิดประโยชน์มากที่สุด

เอกสารอ้างอิง

- Pallant, Julie F. (2005) SPSS survival manual : **A step by step guide to data analysis using SPSS.** 2nd ed. Crows Nest, N.S.W. : Allen & Unwin.
- Stevens, James, (2002). **Applied multivariate statistics for the social sciences.** 4th ed. Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates.