

การวิเคราะห์ความแปรปรวนของ Kruskal-Wallis

*สุทธธีวรรณ พิศศักดิ์โสภณ

บทนำ

ในการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่มากกว่า 2 กลุ่ม ในสถิติพารามेटริก ใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนที่เรียกกันย่อ ๆ ว่า ANOVA หรือ F - test โดยตั้งสมมติฐานของการทดสอบดังนี้

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k \\ H_1 &: \text{มี } \mu \text{ อย่างน้อย 1 คู่ ที่แตกต่างกัน} \\ \text{หรือ } H_1 &: H_0 \text{ ไม่จริง} \end{aligned}$$

ถ้าทดสอบแล้ว ไม่ยอมรับ H_0 ต้องทำการทดสอบต่อไปว่าค่าเฉลี่ยคู่ใดที่แตกต่างกัน โดยใช้วิธีใดวิธีหนึ่ง เช่น วิธีของ Scheffe, Tukey, Newman Keuls หรือ Duncan ในการทดสอบสมมติโดยใช้สถิติพารามิเตอร์ ดังกล่าวนี้นี้ ต้องมีข้อตกลงเบื้องต้นว่า

1. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มได้มาจากการสุ่มตัวอย่างที่มาจากประชากรที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ
2. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มต้องเป็นอิสระจากกัน
3. กลุ่มตัวอย่างมาจากประชากรที่มีความแปรปรวนเท่ากัน
4. ข้อมูลที่ได้อยู่ในมาตราอันตรภาคขึ้นไป

แต่ถ้าในกรณีที่ไม่เป็นไปตามข้อตกลงนี้ เราจะใช้สถิติแบบนอนพารามेटริก ทดสอบความแตกต่างระหว่างกลุ่มตัวอย่างหลายกลุ่ม (k กลุ่ม) ว่ามาจากประชากรเดียวกันหรือมาจากประชากรที่มีลักษณะเหมือนกันหรือไม่ ซึ่งกลุ่มตัวอย่างดังกล่าวมี 2 ลักษณะ คือ

อาจารย์ภาควิชาการวัดผลและวิจัยการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
มหาสารคาม

1. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มเป็นอิสระจากกัน สถิติที่ใช้ ได้แก่ Chi-Square Test, Kruskal-Wallis One-Way Analysis of Variance by Ranks, Median Test. เป็นต้น

2. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มมีความสัมพันธ์กัน สถิติที่ใช้ ได้แก่ Cochran Q Test, Friedman Two-Way Analysis of Variance by Ranks.

ในที่นี้จะขอกล่าวถึงการทดสอบที่ใช้สถิตินอนพารามตริกกรณีของกลุ่มตัวอย่างหลายกลุ่ม (k กลุ่ม) เป็นอิสระจากกัน โดยใช้การทดสอบความแปรปรวนของครุสคัล - วอลลิส (Kruskal-Wallis One-Way Analysis of Variance by Ranks)

การทดสอบความแปรปรวนของครุสคัล - วอลลิส

(Kruskal-Wallis One-way Analysis of Variance Ranks)

การทดสอบแบบ Kruskal - Wallis เป็นการทดสอบกลุ่มตัวอย่างหลาย ๆ กลุ่มที่ไม่สัมพันธ์กันว่ามีมาจากประชากรเดียวกัน หรือมาจากประชากรที่มีมัธยฐานเหมือนกันหรือไม่ ข้อมูลที่ได้จากการวัดอยู่ในมาตราเรียงอันดับเป็นอย่างต่ำ สัญลักษณ์ที่ใช้ คือ KW

การตั้งสมมุติฐานสำหรับการทดสอบ

$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$ เมื่อ θ_j เป็นมัธยฐานของประชากรกลุ่มที่ j ($j = 1, 2, \dots, k$)

$H_1 : \theta_i \neq \theta_j$ สำหรับบางกลุ่ม i และ j

ถ้า H_1 เป็นจริง แสดงว่าต้องมีกลุ่มตัวอย่างอย่างน้อย 1 คู่ ที่มีมัธยฐานแตกต่างกัน

ลักษณะตารางบรรจุข้อมูล

กลุ่ม				
1	2	...	k	
X_{11}	X_{12}	...	X_{1k}	
X_{21}	X_{22}	...	X_{2k}	
X_{n1}		...	X_{nk}	
X_{nk}				

เมื่อ X_{ij} เป็น ค่าสังเกตที่ i ในกลุ่มที่ j
 n_j เป็น จำนวนข้อมูลในกลุ่มที่ j ($j = 1, 2, \dots, k$)

สูตรที่ใช้ในการคำนวณ

$$KW = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k n_j (\bar{R}_j - \bar{R})^2 \dots \dots \dots (1)$$

หรือ

$$KW = \left[\frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k n_j \bar{R}_j^2 \right] - 3(N+1) \dots \dots \dots (2)$$

เมื่อ k แทน จำนวนกลุ่ม
 n_j แทน จำนวนข้อมูลในแต่ละกลุ่มที่ j
 N แทน จำนวนข้อมูลทั้งหมด ($N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$)
 R_j แทน ผลรวมอันดับที่ในกลุ่มที่ j
 $\bar{R}_j$ แทน ค่าเฉลี่ยของอันดับที่ในกลุ่มที่ j
 $\bar{R}$ แทน ค่าเฉลี่ยของอันดับที่ในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด $\bar{R} = \frac{(N+1)}{2}$

วิธีการคำนวณ

1. จัดเรียงอันดับ ค่าที่สังเกตได้ทั้งหมด ค่าที่น้อยที่สุดให้เป็นอันดับ 1 ถัดไปเรื่อย ๆ จนถึงค่ามากที่สุดให้เป็นอันดับที่ N
2. หาผลรวมของอันดับที่จัดได้ในแต่ละกลุ่ม (คือค่า R_j)
3. หาค่าเฉลี่ยของอันดับที่จัดได้ในแต่ละกลุ่ม (คือค่า $\bar{R}_j$)
4. คำนวณค่า KW แล้วทดสอบนัยสำคัญ ซึ่งต้องพิจารณาถึงจำนวนกลุ่มตัวอย่าง (k) และขนาดของตัวอย่าง (n_j) ดังนี้
 - 4.1 ถ้า $k = 3$ และ $n_1, n_2, n_3 \leq 5$ เปิดตาราง 0 ทาค่า KW
ถ้า KW จากการคำนวณมากกว่า KW จากตารางเราจะ Reject H_0
 - 4.2 กรณีที่นอกเหนือจากข้อ 4.1 การแจกแจงของค่าสถิติ KW จะมีค่าใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบ X^2 ที่ $df = k - 1$ การทดสอบนัยสำคัญใช้ตาราง Critical Value of the Chi-Square distribution
5. ถ้าการทดสอบ Reject H_0 ต้องทำการทดสอบต่อไปอีกว่ามีคู่ใดแตกต่างกันบ้าง โดยการเปรียบเทียบพหุคูณระหว่างกลุ่มดังนี้

การเปรียบเทียบพหุคูณระหว่างกลุ่ม

การตั้งสมมติฐาน $H_0 : \sigma_u = \sigma_v$
 $H_1 : \sigma_u \neq \sigma_v$ สำหรับบางกลุ่มที่ u และ v

เราจะ Reject H_0 ถ้า
$$\left| \bar{R}_u - \bar{R}_v \right| \geq Z_{\alpha/k(k-1)} \sqrt{\frac{N(N+1)}{12} \left(\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v} \right)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

(n_u, n_v เป็นจำนวนกลุ่มตัวอย่างที่นำมาเปรียบเทียบกัน)

ค่า $Z_{\alpha/k(k-1)}$ เราจะสามารถเปิดได้จากตาราง A_{α} เมื่อให้ $\#C = \frac{k(k-1)}{2}$

เมื่อ k เป็นจำนวนกลุ่มตัวอย่าง

ตัวอย่าง นักวิจัยต้องการทดสอบว่าถ้าใช้วิธีสอน 3 วิธี ในวิชา Computer จะทำให้นักศึกษามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันหรือไม่ จึงทำการทดลองสอนกับนักศึกษา 3 กลุ่ม ปรากฏว่าได้ผลดังนี้ (กำหนด $\alpha = .05$)

วิธีสอนที่ 1		วิธีสอนที่ 2		วิธีสอนที่ 3	
คะแนน	อันดับ	คะแนน	อันดับ	คะแนน	อันดับ
29	6	21	1	42	13
38	10	28	5	32	7
39	11	24	3	40	12
23	2	26	4	46	14
35	8	36	9		
$n_1 = 5$ $R_1 = 37$ $\overline{R}_1 = 7.4$		$n_2 = 5$ $R_2 = 22$ $\overline{R}_2 = 4.4$		$n_3 = 4$ $R_3 = 46$ $\overline{R}_3 = 11.5$	
N = 14					

ตั้งสมมุติฐาน $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$
 $H_1 : \text{มีค่า } \sigma \text{ อย่างน้อย 1 คู่ ที่แตกต่างกัน}$

การทดสอบ

คำนวณค่า KW โดยแทนค่าลงในสูตร (2)

$$KW = \left[\frac{12}{14(14+1)} \{ 5(7.4)^2 + 5(4.4)^2 + 4(11.5)^2 \} \right] - 3(14+1)$$

$$= 6.41$$

- **การตัดสินใจ** เปิดตาราง 0 พิจารณาค่าตัวอย่าง n_1, n_2, n_3 เป็น 5, 5, 4 และ $\alpha = .05$ ตรงกับ $KW = 5.64$
 KW จากการคำนวณ $> KW$ จากตาราง จึง Reject H_0
 แสดงว่า วิธีสอน 3 วิธี ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกัน

ทดสอบความแตกต่างเป็นรายคู่ว่ามีคู่ใดแตกต่างกันบ้าง

ตั้งสมมุติฐาน

$$H_0 : \sigma_u = \sigma_v$$

$$H_1 : \sigma_u \neq \sigma_v \quad \text{สำหรับบางกลุ่มที่ } u \text{ และ } v$$

จะปฏิเสธ H_0 ถ้า

$$|\bar{R}_u - \bar{R}_v| \geq Z_{\alpha/(k-1)} \sqrt{\frac{N(N+1)}{12} \left(\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v} \right)}$$

เปิดตาราง A_{α} ที่ $\alpha = .05$ และ $\#C = \frac{3(3-1)}{2} = 3$

ได้ค่า $Z_{\alpha/(k-1)} = 2.394$ แล้วนำไปแทนค่าใน (3)

เปรียบเทียบความแตกต่าง

$$|\bar{R}_1 - \bar{R}_2| = 3 < 6.33$$

$$|\bar{R}_1 - \bar{R}_3| = 4.1 < 6.72$$

$$|\bar{R}_2 - \bar{R}_3| = 7.1 > 6.72$$

แสดงว่า วิธีสอนที่ 2 และวิธีสอนที่ 3 ให้ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคอมพิวเตอร์

แตกต่างกัน

บทสรุป

ในการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่มากกว่า 2 กลุ่ม และแต่ละกลุ่มเป็นอิสระจากกัน สำหรับสถิติพาราเมตริก ใช้การทดสอบ F-test แต่ถ้าข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของการทดสอบแบบ F-test เราก็สามารถทำการทดสอบได้โดยใช้ สถิตินอนพาราเมตริก ที่เรียกว่า Kruskal-Wallis One-Way Analysis of Variance By Ranks. ซึ่งการคำนวณง่าย สะดวก ไม่ยุ่งยาก ซับซ้อน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้น้อย อย่างไรก็ตามจะเลือกใช้สถิติใดทดสอบควรพิจารณาข้อมูลที่ได้จากการรวบรวมว่าเป็นไปตามข้อตกลงของการใช้สถิตินั้น ๆ หรือไม่ การทดสอบ KW นี้ ถ้าเปรียบเทียบกับ การทดสอบ F-test จะมีประสิทธิภาพ 95.5%

หนังสืออ่านประกอบ

นิภา ศรีไพโรจน์. สถิตินอนพาราเมตริก. พิมพ์ครั้งที่ 2 โอเดียนสโตร์ 2533.

Siegel Sidney, Castellan N:John. Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences
Mc Graw – Hill Book Company, 1988.

TABLE A_{II}

Critical z values for #c multiple comparisons*

Entries in the table for a given # c and level of significance α is the point on the standard normal distribution such that the upper-tail probability is equal to $\frac{1}{2} \alpha / \# c$. For values of #c outside the range included in the table, z can be found by using Appendix Table A.

#c	α					
	Two-Tailed					
	One-tailed	.30	.25	.20	.15	.10
		.15	.125	.10	.075	.05
1		1.036	1.150	1.282	1.440	1.645
2		1.440	1.534	1.645	1.780	1.960
3		1.645	1.732	1.834	1.960	2.128
4		1.780	1.863	1.960	2.080	2.241
5		1.881	1.960	2.054	2.170	2.326
6		1.960	2.037	2.128	2.241	2.394
7		2.026	2.100	2.189	2.300	2.450
8		2.080	2.154	2.241	2.350	2.498
9		2.128	2.200	2.287	2.394	2.539
10		2.170	2.241	2.326	2.432	2.576
11		2.208	2.278	2.362	2.467	2.608
12		2.241	2.301	2.394	2.498	2.638
15		2.326	2.394	2.475	2.576	2.713
21		2.450	2.515	2.593	2.690	2.823
28		2.552	2.615	2.690	2.785	2.913

*# c is the number of comparisons

Table O

Critical values for the Kruskal-Wallis One-way analysis of variance by ranks statistic, KW

Sample sizes			α				
n_1	n_2	n_3	.10	.05	.01	.005	.001
2	2	2	4.25				
3	2	1	4.29				
3	2	2	4.71	4.71			
3	3	1	4.57	5.14			
3	3	2	4.56	5.36			
3	3	3	4.62	5.60	7.20	7.20	
4	2	1	4.50				
4	2	2	4.46	5.33			
4	3	1	4.06	5.21			
4	3	2	4.51	5.44	6.44	7.00	
4	3	3	4.71	5.73	6.75	7.32	8.02
4	4	1	4.17	4.97	6.67		
4	4	2	4.55	5.45	7.04	7.28	
4	4	3	4.55	5.60	7.14	7.59	8.32
4	4	4	4.65	5.69	7.66	8.00	8.65
5	2	1	4.20	5.00			
5	2	2	4.36	5.16	6.53		
5	3	1	4.02	4.96			
5	3	2	4.65	5.25	6.82	7.18	
5	3	3	4.53	5.65	7.08	7.51	8.24
5	4	1	3.99	4.99	6.95	7.36	
5	4	2	4.54	5.27	7.12	7.57	8.11
5	4	3	4.55	5.63	7.44	7.91	8.50
5	4	4	4.62	5.62	7.76	8.14	9.00
5	5	1	4.11	5.13	7.31	7.75	
5	5	2	4.62	5.34	7.27	8.13	8.68
5	5	3	4.54	5.71	7.54	8.24	9.06
5	5	4	4.53	5.64	7.77	8.37	9.32
5	5	5	4.56	5.78	7.98	8.72	9.68
Large samples			4.61	5.99	9.21	10.60	13.82

Note : The absence of an entry in the extreme tails indicates that the distribution may not take on the necessary extremes values. Adapted from Table F in Kraft, C.H., and van Eeden, C., (1968). A nonparametric introduction to statistics. New York : Macmillan, with the permission of the publisher.