การทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ
(KOLMOGOROV - SMIRNOV TEST)

ดร. มนตรี อนันตรักษ์ *

โคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ เป็นวิธีการทดสอบทางสถิติแบบไม่ใช้พาราเมตริก (Non Parametric Stristics) ใช้สำหรับการทดสอบสมมติฐาน ที่สำคัญ 2 อย่าง คือ

1. การทดสอบภาวะทับกันสนิท (Goodness of Fit) เช่น ความสอดคล้องระหว่างการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างที่เป็นจริงกับที่เป็นทฤษฎี

2. การทดสอบว่ากลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระสองกลุ่มได้ถูกสุ่มมาจากประชากรกลุ่มเดียวกันหรือไม่ หรือ มาจากประชากรที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นเหมือนกันหรือไม่

การทดสอบภาวะทับกันสนิท

วิธีการของโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ ใช้ความแตกต่างของความถี่สะสมของความน่าจะเป็นทางทฤษฎี (Cumulative Probability) กับความถี่สัมพันธ์สะสมที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง (Cumulative Relative Frequency) เพื่อใช้

---

* ผู้ช่วยรองอธิการบดีฝ่ายบริหาร มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม

ทดสอบว่าการแจกแจงข้อมูลจากตัวอย่างจะคล้อยตามรูปแบบการแจกแจงแบบใดแบบหนึ่งหรือไม่ นั่นคือ ทดสอบความสอดคล้องระหว่างการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างที่เป็นจริงกับที่เป็นทฤษฎี เช่น Ho: ประชากรมีการแจกแจงแบบเฉลี่ยเท่ากันหมด

ให้ Fo(X) แทนฟังก์ชั่นการแจกแจงความถี่สะสมภายใต้ Ho ที่พิจารณานั่นคือ Fo(X) คือ สัดส่วนของหน่วยตัวอย่างที่คาดว่าจะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ X

และให้ Sn(X) แทนฟังก์ชั่นของการแจกแจงความถี่สัมพันธ์สะสมของตัวอย่างขนาด N นั่นคือ Sn(X) = K/N , เมื่อ K เป็นจำนวนหน่วยตัวอย่างในตัวอย่างที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ X

หากตัวอย่างมีคุณสมบัติใกล้เคียงกับที่สนใจใน Ho แล้วผลต่างระหว่าง Fo(X) กับ Sn(X) ควรจะน้อย เพราะฉะนั้น

D = Maximum |Fo(x) - Sn(x)|

D คือ ผลต่างของ Fo(x) กับ Sn(x) ที่มีค่าสูงสุด (ไม่คิดเครื่องหมาย)

ในการทดสอบ เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญ (α) ให้ ค่าวิกฤตของ D ดูได้จากตาราง (ภาคผนวก) หาก D ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตเราจะปฏิเสธ Ho ที่กำลังพิจารณา

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

1. ตัวแปรมีระดับการวัดในมาตราอันดับ
2. ลักษณะของข้อมูลเป็นความถี่ที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว

ตัวอย่าง

ในการประเมินอุดมการณ์สหกรณ์ ของสมาชิกสหกรณ์รวม 30 คน ปรากฏว่ามีผู้ได้คะแนนของอุดมการณ์สหกรณ์สูงมาก 2 คน สูง 3 คน ต่ำ 14 คน และต่ำมาก 11 คน เราต้องการจะพิจารณาว่า

1. สมาชิกสหกรณ์มีอุดมการณ์สหกรณ์ในระดับต่าง ๆ พอ ๆ กันหรือไม่

2. สมาชิกสหกรณ์มีอุดมการณ์สหกรณ์ในระดับสูงมากถึงต่ำมากเป็นอันตราส่วน 1:1:2:3 หรือไม่

ในกรณีที่ 1 ผลการวิเคราะห์จะได้ดังตาราง

(Ho : สมาชิกมีอุดมการณ์ในระดับต่าง ๆ พอ ๆ กัน)

	ระดับอุดมการณ์สหกรณ์			
	ต่ำมาก	ต่ำ	สูง	สูงมาก
ความถี่ที่สังเกตได้	11	14	3	2
Fo(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$
Sn(x)	$\frac{11}{30}$	$\frac{25}{30}$	$\frac{28}{30}$	$\frac{30}{30}$
|Fo(X) - Sn(X)|	.117	.333	.183	0

เพราะฉะนั้น D = Maximum |Fo(X) - Sn(X) |

D = .333

เมื่อกำหนด α = 0.01 ค่าวิกฤตจากตารางเท่ากับ .290 (ดูที่ภาคผนวก df = 30)

เพราะฉะนั้น จึงปฏิเสธ Ho

ในกรณีที่ 2 ผลการวิเคราะห์จะได้ดังตาราง

(Ho : อัตราส่วนของระดับอุดมการณ์จากต่ำไปสูงคือ 3:2:1:1)

	ระดับอุดมการณ์สหกรณ์			
	ต่ำมาก	ต่ำ	สูง	สูงมาก
ความถี่ที่สังเกตได้	11	14	3	2
Fo(x)	3/7	5/7	6/7	7/7
Sn(x)	11/30	25/30	28/30	30/30
|Fo(X) - Sn(X)|	.062	.119	.076	0

เพราะฉะนั้น D = Maximum |Fo(X) - Sn(X) |

D = .119

เมื่อกำหนด α = 0.01 ค่าวิกฤตจากตาราง เท่ากับ .290

เพราะฉะนั้นเราจึงคงสมมติฐาน Ho ไว้

การทดสอบกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระได้ถูกสุ่มมาจากประชากรกลุ่มเดียวกัน

การทดสอบนี้คล้ายกับกรณีที่มีกลุ่มตัวอย่างเดียว เป็นการทดสอบที่

พิจารณาการแจกแจงความถี่สะสมของตัวอย่างทั้งสอง ว่าจะใกล้เคียงกันหรือไม่ หากกลุ่มตัวอย่างทั้งสองมาจากประชากรเดียวกัน เราก็หวังว่า ลักษณะการแจกแจงความถี่สะสมจะใกล้เคียงกัน จะแตกต่างกันบ้างก็เนื่องมาจากโอกาสการสุ่ม หากลักษณะการแจกแจงความถี่สะสมแตกต่างกันไปมาก ก็น่าจะเชื่อได้ว่า ตัวอย่างทั้งสองมาจากประชากรที่ต่างกัน

<u>วิธีการทดสอบ</u> จะสร้างตารางแจกแจงความถี่สะสมของตัวอย่างทั้งสองโดยใช้อันตรภาคชั้นเดียวกัน ในแต่ละอันตรภาคชั้นจะพิจารณาผลต่างของความถี่สะสม

ให้ $Sn1(X)$ เป็นฟังก์ชั่นความถี่สัมพัทธ์สะสมของกลุ่มตัวอย่างที่ 1 คือ

$S_{n_1}(X) = \frac{K1}{n1}$ เมื่อ K1 จำนวนหน่วยที่มีค่า $\leq X$

ให้ $Sn_2(X)$ เป็นฟังก์ชั่นความถี่สัมพัทธ์สะสมของกลุ่มตัวอย่างที่ 2 คือ

$Sn_2(X) = \frac{Ks}{n2}$ เมื่อ K2 จำนวนหน่วยที่มีค่า $\leq X$

เพราะฉะนั้น $D = \text{Maximum } |Sn_1(X) - Sn_2(X)|$

ในการทดสอบ เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญ (α) ให้ ค่าวิกฤตของ D ดูได้จากตาราง (ภาคผนวก) หาก D ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตเราจะปฏิเสธ Ho ที่กำลังพิจารณา

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

1. ตัวแปรมีระดับการวัดในมาตราจัดลำดับ
2. กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มเป็นอิสระต่อกัน

<u>ตัวอย่าง</u> ในการศึกษาความแตกต่างระหว่างชายกับหญิง ในการมีบทบาทแก้ปัญหา ผู้วิจัยได้ให้คะแนนพฤติกรรมของชาย 45 คน หญิง 60 คน ในการแก้ปัญหา โดยแบ่งระดับคะแนนพฤติกรรมออกเป็น 5 ระดับ คือ อ่อนมาก

อ่อน ปานกลาง สูง และสูงมาก ปรากฏผล ดังนี้

เพศ/ระดับ	อ่อนมาก	อ่อน	ปานกลาง	สูง	สูงมาก
ชาย	4	13	8	15	5
หญิง	7	5	20	21	7

เราอยากจะศึกษาว่า ชายกับหญิงมีบทบาทการแก้ปัญหาต่างกันหรือไม่

ผลการวิเคราะห์ ปรากฏดังตาราง

Ho : ชายกับหญิงมีบทบาทการแก้ปัญหาเหมือนกัน

H1 : ชายกับหญิงมีบทบาทการแก้ปัญหาต่างกัน

ตาราง การแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสม

เพศ/ระดับ	อ่อนมาก	อ่อน	ปานกลาง	สูง	สูงมาก
$Sn_1(X)$ชาย	$\frac{4}{45}$	$\frac{17}{45}$	$\frac{25}{45}$	$\frac{40}{45}$	$\frac{45}{45}$
$Sn_2(X)$หญิง	$\frac{7}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{32}{60}$	$\frac{53}{60}$	$\frac{60}{60}$
$Sn_1(x)-Sn_2(x)$	.028	.178	.022	.006	0

เพราะฉะนั้น $D = \text{Maximum } |Sn_1(X) - Sn_2(X)|$

$D = .178$

เมื่อกำหนด $\alpha = 0.05$ ค่าวิกฤตจากตาราง (ภาคผนวก)

เท่ากับ $1.36\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1\, n_2}}$

$$= 1.36\sqrt{\frac{45 + 60}{45 \times 60}} = .268$$

เพราะฉะนั้น เราจึงคงสมมติฐาน Ho ไว้

TABLE A–11. Quantiles of the Kolmogorov test statistic

One-Sided Test $p = .90$	*.95*	*.975*	*.99*	*.995*		$p = .90$	*.95*	*.975*	*.99*	*.995*
Two-Sided Test $p = .80$	*.90*	*.95*	*.98*	*.99*		$p = .80$	*.90*	*.95*	*.98*	*.99*
$n = 1$	.900	.950	.975	.990	.995	$n = 21$	.226	.259	.287	.321	.344
2	.684	.776	.842	.900	.929	22	.221	.253	.281	.314	.337
3	.565	.636	.708	.785	.829	23	.216	.247	.275	.307	.330
4	.493	.565	.624	.689	.734	24	.212	.242	.269	.301	.323
5	.447	.509	.563	.627	.669	25	.208	.238	.264	.295	.317
6	.410	.468	.519	.577	.617	26	.204	.233	.259	.290	.311
7	.381	.436	.483	.538	.576	27	.200	.229	.254	.284	.305
8	.358	.410	.454	.507	.542	28	.197	.225	.250	.279	.300
9	.339	.387	.430	.480	.513	29	.193	.221	.246	.275	.295
10	.323	.369	.409	.457	.489	30	.190	.218	.242	.270	.290
11	.308	.352	.391	.437	.468	31	.187	.214	.238	.266	.285
12	.296	.338	.375	.419	.449	32	.184	.211	.234	.262	.281
13	.285	.325	.361	.404	.432	33	.182	.208	.231	.258	.277
14	.275	.314	.349	.390	.418	34	.179	.205	.227	.254	.273
15	.266	.304	.338	.377	.404	35	.177	.202	.224	.251	.269
16	.258	.295	.327	.366	.392	36	.174	.199	.221	.247	.265
17	.250	.286	.318	.355	.381	37	.172	.196	.218	.244	.262
18	.244	.279	.309	.346	.371	38	.170	.194	.215	.241	.258
19	.237	.271	.301	.337	.361	39	.168	.191	.213	.238	.255
20	.232	.265	.294	.329	.352	40	.165	.189	.210	.235	.252
				Approximation for $n > 40$			$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

The entries in this table are selected quantiles w_p of the Kolmogorov test statistics T_1, T_1^+, and T_1^- as defined by (6.1.1) for two-sided tests and by (6.1.2) and (6.1.3) for one-sided tests. Reject H_0 at the level α if T exceeds the $1 - \alpha$ quantile given in this table. These quantiles are exact for $n \leq 20$ in the two-tailed test. The other quantiles are approximations which are equal to the exact quantiles in most cases.

From "Table of Percentage Points of Kolmogorov Statistics," by L. H. Miller, *Journal of the American Statistical Association*, 1956, Vol. 51, pp. 111–121, as adapted by Conover (1971). Reprinted by permission.

TABLE A–13. Percentiles of the Kolmogorov–Smirnov test statistic

		One-Sided Test: α = .90	.95	.975	.99	.995
		Two-Sided Test: α = .80	.90	.95	.98	.99
n_1	n_2					
3	3	.667	.667			
3	4	.750	.750			
3	5	.667	.800	.800		
3	6	.667	.667	.833		
3	7	.667	.714	.857	.857	
3	8	.625	.750	.750	.875	
3	9	.667	.667	.778	.889	.889
3	10	.600	.700	.800	.900	.900
3	12	.583	.667	.750	.833	.917
4	4	.750	.750	.750		
4	5	.600	.750	.800	.800	
4	6	.583	.667	.750	.833	.833
4	7	.607	.714	.750	.857	.857
4	8	.625	.625	.750	.875	.875
4	9	.556	.667	.750	.778	.889
4	10	.550	.650	.700	.800	.800
4	12	.583	.667	.667	.750	.833
4	16	.563	.625	.688	.750	.812
5	5	.600	.600	.800	.800	.800
5	6	.600	.667	.667	.833	.833
5	7	.571	.657	.714	.829	.857
5	8	.550	.625	.675	.800	.800
5	9	.556	.600	.689	.778	.800
5	10	.500	.600	.700	.700	.800
5	15	.533	.600	.667	.733	.733
5	20	.500	.550	.600	.700	.750
6	6	.500	.667	.667	.833	.833
6	7	.548	.571	.690	.714	.833
6	8	.500	.583	.667	.750	.750
6	9	.500	.556	.667	.722	.778
6	10	.500	.567	.633	.700	.733
6	12	.500	.583	.583	.667	.750
6	18	.444	.556	.611	.667	.722
6	24	.458	.500	.583	.625	.667
7	7	.571	.571	.714	.714	.714
7	8	.482	.589	.625	.732	.750
7	9	.492	.556	.635	.714	.746
7	10	.471	.557	.614	.700	.714
7	14	.429	.500	.571	.643	.714
7	28	.429	.464	.536	.607	.643
8	8	.500	.500	.625	.625	.750
8	9	.444	.542	.625	.667	.750
8	10	.475	.525	.575	.675	.700
8	12	.458	.500	.583	.625	.667

TABLE A–13 (continued)

n_1	n_2					
8	16	.438	.500	.563	.625	.625
8	32	.406	.438	.500	.563	.594
9	9	.444	.556	.556	.667	.667
9	10	.467	.500	.578	.667	.689
9	12	.444	.500	.556	.611	.667
9	15	.422	.489	.533	.600	.644
9	18	.389	.444	.500	556	.611
9	36	.361	.417	.472	.528	.556
10	10	.400	.500	.600	.600	.700
10	15	.400	.467	.500	.567	.633
10	20	.400	.450	.500	.550	.600
10	40	.350	.400	.450	.500	.576
11	11	.454	.454	.545	.636	.636
12	12	.417	.417	.500	.583	.583
12	15	.383	.450	.500	.550	.583
12	16	.375	.438	.479	.542	.583
12	18	.361	.417	.472	.528	.556
12	20	.367	.417	.467	.517	.567
13	13	.385	.462	.462	.538	.615
14	14	.357	.429	.500	.500	.571
15	15	.333	.400	.467	.467	.533
16	16	.375	.375	.438	.500	.563
17	17	.353	.412	.412	.471	.529
18	18	.333	.389	.444	.500	.500
19	19	.316	.368	.421	.473	.473
20	20	.300	.350	.400	.450	.500
21	21	.286	.333	.381	.429	.476
22	22	.318	.364	.364	.454	.454
23	23	.304	.348	.391	.435	.435
24	24	.292	.333	.375	.417	.458
25	25	.280	.320	.360	.400	.440
For other sample sizes, let $C = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$ and use as an approximation:						
		$1.07C$	$1.22C$	$1.36C$	$1.52C$	$1.63C$

Adapted from "Distribution Table for the Deviation between Two Sample Cumulatives," by F. J. Massey, Jr., *Annals of Mathematical Statistics*, 1952, Vol. 23, pp. 435–441, as adapted by Conover (1971). Reprinted by permission.

บรรณานุกรม

ประชุม สุวัตถี. สถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (อัดสำเนา) ศูนย์ศึกษาและฝึกอบรมการวิจัยทางสังคมศาสตร์ กองส่งเสริมการวิจัย สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ กระทรวงวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการพลังงาน ,2525.

วิเชียร เกตุสิงห์. สถิติวิเคราะห์สำหรับการวิจัย สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช จำกัด กรุงเทพ ฯ 2526.

Siegel, Sidney. Nonparametric Statistics for the Behevioral Sciences, McGraw-Hill Book Company , Inc., 1956.

Marascuilo, Leonard A.and McSweeney, Maryellen. Nonparametric and Distribution-Free Methods for the Social Sciences , Wadsworth Publishing Company , Inc., 1977.