กลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์
THE MACHANISIM OF CONCEPT FORMATION IN ADVANCED MATHEMATICAL THINKING

ณิศรา สุทธิสังข์*

Nisara Suthisung*

บทคัดย่อ

กลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์พิจารณาได้จากกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในการหาคำตอบที่มีลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่องกันของการดำเนินการกลั่นแนวคิดในกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดจากการพัฒนาวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาและนำไปสู่ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ กลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ แบ่งเป็น 5 ขั้นตอน คือ ขั้นการใช้วิธีการเดียวในการหาคำตอบ ขั้นการใช้วิธีการที่หลากหลายในการหาคำตอบ ขั้นการใช้วิธีการทั่วไปในการคำตอบ ขั้นการพิจารณาถึงวิธีการทั่วไปนี้เป็นแนวคิดที่สำคัญในการหาคำตอบ และขั้นการนำแนวคิดที่เกิดขึ้นไปใช้แก้ปัญหาใหม่

คำสำคัญ: การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์, ความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการ, การดำเนินการกลั่นแนวคิด

Abstract

The mechanism of concept formation in advanced mathematical thinking, considered from the process of mathematical thinking of the students in finding the answer with the hierarchy of the compression of continuous process in concept formation. The development of a procedure in problem solving into process and lead to mathematical concept. The mechanism of concept formation in advanced mathematical thinking is divided into five steps: using a procedure in solving problem, using multi-procedure, using a common procedure, considering of common procedure as important concept in problem solving and application the concept happens to solve new problems.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking, Procept, Compression

---

* อาจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระนคร

Corresponding Author: e-mail: nisara.s@rmutp.ac.th

บทนำ

ในปัจจุบันนี้การสอนคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัย เน้นผลลัพธ์ (product) ของผู้เรียนมากกว่ากระบวนการคิด (process) (Skemp, 1979) อีกทั้งเนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับปริญญาตรีมีความเป็นนามธรรมสูง ความรู้พื้นฐานในเนื้อหาและวิธีการที่เป็นพื้นฐานถูกนำมาใช้สอนเพื่อให้ผู้เรียนสามารถคิดหาคำตอบในเนื้อหาที่ได้เรียนในปัจจุบัน โดยไม่เน้นมุ่งเน้นถึงการเชื่อมโยงความรู้พื้นฐานหรือวิธีการที่เป็นพื้นฐานในการสร้างความรู้ในขั้นสูงต่อไป และการเรียนคณิตศาสตร์ที่ทำให้เกิดประสิทธิผลกับผู้เรียนจำเป็นต้องอาศัยสิ่งที่ได้เรียนรู้มาก่อนหน้านี้มาใช้ในการสร้างองค์ความรู้ของตนเอง (Tall, 1978)

นอกจากนี้ การเชื่อมโยงการคิดพื้นฐานไปสู่การคิดขั้นสูงเป็นกระบวนการเรียนรู้รูปแบบหนึ่งที่พัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียน ซึ่งจำเป็นต้องอาศัยการคิดพื้นฐานเพื่อพัฒนาไปสู่การสร้างความรู้ หรืออธิบายได้อีกนัยหนึ่งว่า การคิดขั้นสูงจำเป็นต้องสะสมความรู้ที่ได้เรียนมาก่อนหน้านั้นเพื่อสร้างความรู้ใหม่ (Tall, 1991) การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์เป็นการสร้างแนวคิดใหม่หรือการขยายแนวคิดที่มีอยู่เดิมโดยอาศัยความรู้พื้นฐานหรือวิธีการที่เป็นพื้นฐาน (Tall, 1995)

มีนักคณิตศาสตรศึกษาได้เสนอประเด็นวิจัยการเรียนรู้การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ผ่านกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดและการพิจารณาพื้นที่ของการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์จากกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดผ่านการดำเนินการกลั่นแนวคิด (Tall, 1991) นอกจากนี้ การคิดขั้นสูงเป็นกระบวนการคิดที่สัมพันธ์กับการสร้างความคิดรวบยอดโดยการสร้างความคิดรวบยอดที่พัฒนาขึ้นมาจากกระบวนการในการแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอด และอาศัยเครื่องมือของการคิดซึ่งเรียกว่า “การดำเนินการกลั่นแนวคิด” (Tall and Vinner, 1981)

การดำเนินการกลั่นแนวคิดที่อาศัยวิธีการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาเพื่อสร้างความคิดรวบยอดเป็นการเชื่อมโยงการคิดซึ่งเป็นวิธีการพื้นฐานไปสู่การคิดในระดับที่สูงขึ้น การสร้างความคิดรวบยอดในลักษณะนี้ส่งผลให้ผู้เรียนมีศักยภาพของการคิดมากยิ่งขึ้นโดยเฉพาะการคิดในระดับเนื้อหาที่สูงขึ้นหรือสลับซับซ้อนมากขึ้น (Gray and Tall, 2007) นอกจากนี้การดำเนินการกลั่นแนวคิดจากกระบวนการในการแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอดสามารถพิจารณาสัญลักษณ์ในการคำนวณเพื่อหาคำตอบและเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการคิดขั้นสูง (Gray and Tall, 1994)

กระบวนการสร้างความคิดรวบยอดผ่านการดำเนินการกลั่นแนวคิดจากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่กระบวนการในการแก้ปัญหาและพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอดอย่างเป็นรูปธรรมจึงเป็นกระบวนการที่มีลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่องกัน (Tall and Isoda, 2007) และกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดผ่านการดำเนินการกลั่นแนวคิดอย่างมีลำดับขั้นตอนจากวิธีการในการแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอด (Tall, 2006)

กระบวนการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์จึงมีกลไกของกระบวนการสร้างที่มีลำดับขั้นตอนต่อเนื่องกันจากการพิจารณาวิธีการในการแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอด ซึ่งสามารถนำความรู้หรือแนวคิดพื้นฐานที่มีอยู่เดิมมาต่อยอดหรือสร้างองค์ความรู้ใหม่ได้

บทความนี้จึงอธิบายและยกตัวอย่างประกอบเพื่อแสดงให้เห็นถึงกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยการดำเนินการกลั่นแนวคิดซึ่งเป็นเครื่องมือในการสร้างความคิดรวบยอดผ่านการเชื่อมต่อวิธีการในการแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอด

การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ (Advanced Mathematical Thinking)

Tall (1991) อธิบายถึงการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องอาศัยการคิดพื้นฐานเพื่อพัฒนาไปสู่การสร้างความรู้ หรืออธิบายได้อีกนัยหนึ่งว่า การคิดขั้นสูงจำเป็นต้องสะสมความรู้ที่ได้เรียนมาก่อนหน้านั้นเพื่อสร้างความรู้ใหม่ และ Tall (1995) ได้กล่าวว่า การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์เป็นการสร้างแนวคิดใหม่หรือการขยายแนวคิดที่มีอยู่เดิม

Tall and Vinner (1981) ได้เสนอแนะถึงการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับการสร้างความคิดรวบยอดของผู้เรียน โดยพิจารณาความเป็นทวิลักษณะของการกระบวนการคิดที่เป็นทั้งกระบวนการและความคิดรวบยอด (process -concept)

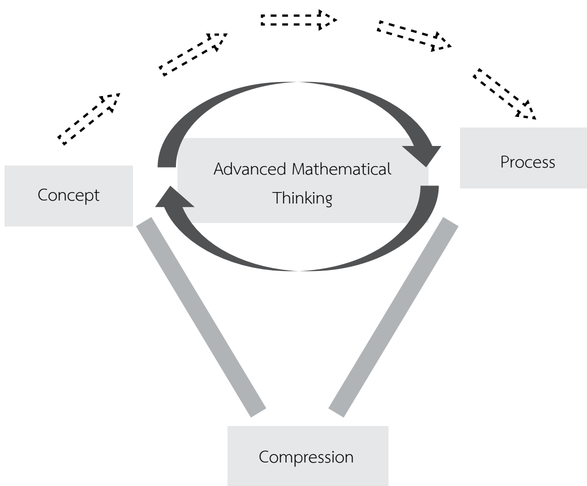
Tall (1991) ได้เสนอแนะถึงการพิจารณาพื้นที่ของการคิดขั้นสูงจากกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดของผู้เรียนผ่านการดำเนินการกลั่นแนวคิด นอกจากนี้แล้วมีนักการศึกษาอีกหลายท่านที่เสนอแนวคิดของการคิดขั้นสูงในรูปแบบที่สัมพันธ์กับการเชื่อมต่อของกระบวนการและความคิดรวบยอด

ในตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 แนวคิดการเชื่อมต่อของกระบวนการและความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูง

	กระบวนการ		**ความคิดรวบยอด**
Skemp (1979) [1]	ใช้วิธีการต่างๆ	การทำให้เป็นองค์รวม (verification)	ความคิดรวบยอด
Greeno (1983) [10]	ใช้วิธีการเดียว	การทำให้เป็นความคิดรวบยอดโดยสมบูรณ์ (conceptual entity)	ความคิดรวบยอด
Sfard (1991) [11]	ดำเนินการด้วยกระบวนการต่างๆ	การตัดทอนให้เห็นเป็นรูปธรรม (reification)	ความคิดรวบยอด
Dubinsky (1991) [12]	ใช้ทีละวิธีการ	การเลือกเฉพาะใจความที่สำคัญ (encapsulation)	ความคิดรวบยอด
Tall (1991)	ดำเนินการเป็นกระบวนการ	การดำเนินการกลั่นแนวคิด (compression)	ความคิดรวบยอด

การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือในการสร้างความคิดรวบยอดซึ่งจะทำให้เกิดความเชื่อมต่อระหว่างกระบวนการและความคิดรวบยอด ดังที่ Tall (1991) ได้กล่าวว่า การดำเนินการกลั่นแนวคิดสร้างและพัฒนาความคิดรวบยอดจากความเป็นทวิลักษณะของกระบวนการและความคิดรวบยอด



ภาพที่ 1 การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ (พัฒนาจากการกรอบการคิดขั้นสูงของ (Tall, 1991: p. 107))

จากภาพที่ 1 การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นในกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดซึ่งอาศัยการดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นตัวเชื่อมโยงกระบวนการและความคิดรวบยอดเพื่อสร้างและพัฒนาความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์

การดำเนินการกลั่นแนวคิด (Compression)

การดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นกรอบในการอธิบายกระบวนการสร้างแนวคิดหรือความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ซึ่งพิจารณาจากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาและพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอด

Gray and Tall (2002; 2007) เสนอแนะถึง การดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นกลไกที่เกิดขึ้นอย่างเป็นธรรมชาติของหน้าที่ทางสมองในการคิดของมนุษย์ ณ ขณะช่วงเวลาใดก็ตามซึ่งทำให้เกิดความคิดรวบยอด หรืออาจกล่าวได้ว่า การดำเนินการกลั่นแนวคิดเพื่อสร้างความคิดรวบยอดทำให้มนุษย์สามารถคิดได้ทั้งการคิดคณิตศาสตร์และการคิดในเรื่องอื่น ๆ รวมถึงการคิดในระดับซับซ้อนที่สูงขึ้นอย่างต่อเนื่อง และเป็นหัวใจสำคัญของการพัฒนาศักยภาพของการคิดมากยิ่งขึ้น

Gray and Tall (2007) อธิบายถึงคำว่า “การดำเนินการกลั่นแนวคิด” (compression) ตามความหมายของ Thurston (1991) การดำเนินการกลั่นแนวคิด คือ ปรากฏการณ์ที่สลับซับซ้อนที่เกิดขึ้นของการคิด โดยเน้นแง่มุมที่จำเป็นและน่าสนใจเพื่อรับรู้ข้อมูลต่า งๆ เป็นองค์รวมและสร้างข้อมูลต่าง ๆ ให้กลายเป็นแก่นแท้ของความรู้อย่างมีค่า หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า การดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับการสร้างความคิดรวบยอด

Rosana and Tall (2008) กล่าวถึงการดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นหัวใจของการคิด และการคิดนี้เกิดขึ้นโดยการสร้างการเชื่อมโยงในสมองเพื่อให้กลายเป็นความคิดรวบยอดที่เกิดขึ้นโดยสมบูรณ์

Gray and Tall (1994) กล่าวถึงศักยภาพของการคิดที่สำคัญ คือ การดำเนินการกลั่นแนวคิดให้กลายเป็นความคิดรวบยอดที่สามารถสร้างการคิดที่ไม่เพียงแต่มีศักยภาพเท่านั้นแต่ยังสามารถทำให้เกิดการคิดในระดับที่ซับซ้อนมากขึ้น Gray and Tall (2007) เสนอแนะว่า ถ้าหากนักเรียนไม่สามารถสร้างการดำเนินการกลั่นแนวคิดให้กลายเป็นความคิดรวบยอดจะส่งผลต่อความเชื่อมโยงระหว่างแนวความคิดต่าง ๆ และการเปลี่ยนแปลงของการคิดต่อไปในระดับที่สูงขึ้น

Wastson (2002) กล่าวถึงการดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นเครื่องมือที่จำเป็นในการสร้างความเข้าใจคณิตศาสตร์ที่ล้ำลึก การดำเนินการกลั่นแนวคิดเกิดขึ้นโดยการพิจารณาวิธีการต่าง ๆ ที่แตกต่างกันหลาย ๆ วิธีด้วยผลลัพธ์เดียวกัน Gray and Tall (1992) เสนอแนะถึง ครูต้องพยายามสนับสนุนให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอด จากการใช้วิธีการต่าง ๆ เพื่อพัฒนาไปสู่กระบวนการและเกิดการตกผลึกเป็นความคิดรวบยอดในท้ายสุด สอดคล้องกับ Gray and Tall (2007) เสนอแนะว่าครูจำเป็นต้องให้การสนับสนุนเด็กโดยเน้นการใช้แนวคิดต่าง ๆ ที่จำเป็นอย่างเหมาะสมในแนวทางที่เด็กสามารถสร้างการดำเนินการกลั่นแนวคิดให้กลายเป็นความคิดรวบยอดได้ด้วยตนเอง

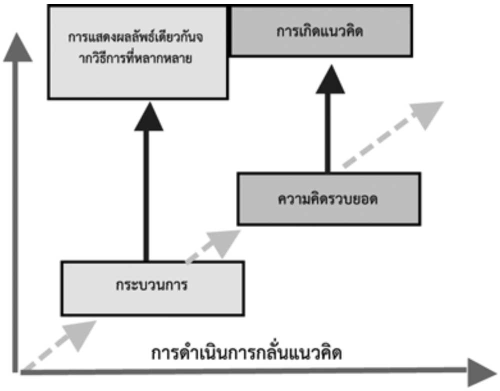
การดำเนินการกลั่นแนวคิดจึงเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการสร้างความคิดรวบยอดและมีขั้นตอนที่ต่อเนื่องอย่างเป็นลำดับของการคิดทางคณิตศาสตร์

ความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการ

ความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการเป็นกรอบหรือพื้นที่ในการพิจารณากลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่กระบวนในการแก้ปัญหาและนำไปสู่การสร้างความคิดรวบยอดในท้ายสุด ความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการจึงมีลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่องกันของกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาศัยการดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นเครื่องมือในการสร้างความคิดรวบยอด

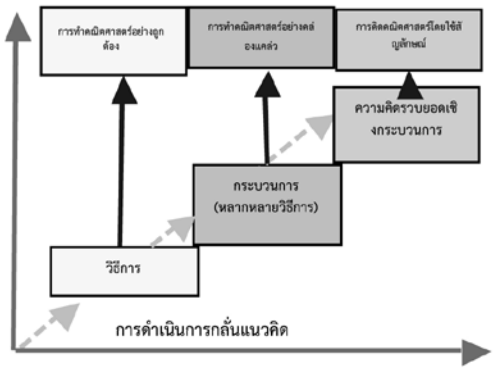
Gray and Tall (1991) พิจารณาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากการใช้สัญลักษณ์ในการคำนวณโดยพิจารณาความเป็นทวิลักษณะระหว่างกระบวนการและความคิดรวบยอด

Gray and Tall (1994) บัญญัติศัพท์ “ความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการ” จากการสังเกตการหาคำตอบของนักเรียนโดยใช้สัญลักษณ์เพื่อแสดงคำตอบหรือผลลัพธ์ที่ได้จากกระบวนการและความคิดรวบยอดประกอบไปด้วย 3 องค์ประกอบ คือ กระบวนการในการแก้ปัญหา (process) ความคิดรวบยอดที่ได้จากการแก้ปัญหา (concept) และสัญลักษณ์ (symbolic) ที่แสดงแทนกระบวนการในการแก้ปัญหาและความคิดรวบยอดที่ถูกสร้างขึ้น



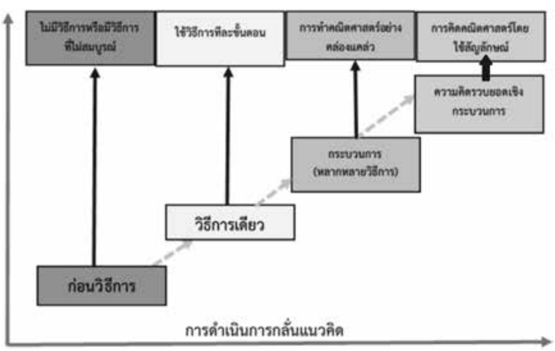
ภาพที่ 2 กลไกการสร้างความคิดรวบยอด (กระบวนการ-ความคิดรวบยอด) (Gray and Tall, 1994)

Tall et al (2001) อธิบายการดำเนินการกลั่นแนวคิดที่ใช้ประโยชน์จากวิธีการ (procedures) กระบวนการ (process) และความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการในการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์



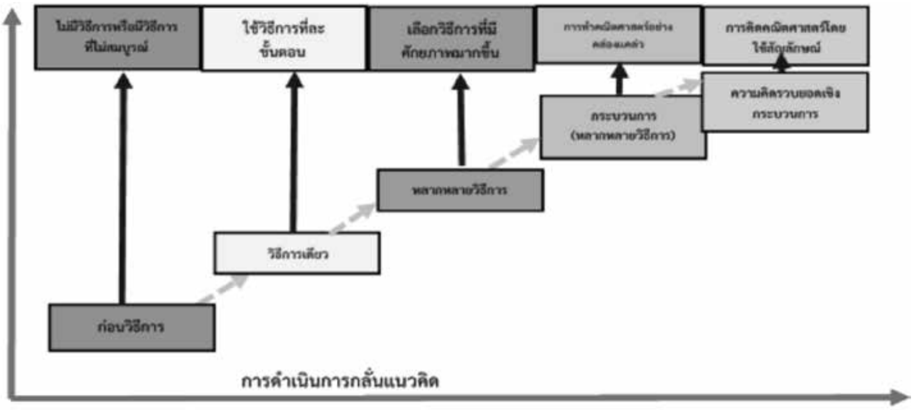
ภาพที่ 3 กลไกการสร้างความคิดรวบยอด (วิธีการ-กระบวนการ-ความคิดรวบยอด) (Tall et al, 2001)

Gray and Tall (2002) พัฒนาขั้นตอนของการดำเนินการกลั่นแนวคิดให้กลายเป็นความคิดรวบยอด มี 4 ลำดับขั้นตอน คือ ขั้นก่อนวิธีการ ขั้นวิธีการ ขั้นกระบวนการ และขั้นเกิดความคิดรวบยอด



ภาพที่ 4 กลไกการสร้างความคิดรวบยอด (ก่อนวิธีการ-วิธีการ-กระบวนการ-ความคิดรวบยอด) (Gray and Tall, 2001)

Tall (2006) พัฒนาขั้นตอนของกระบวนการดำเนินการกลั่นแนวคิดให้กลายเป็นความคิดรวบยอด แบ่งออกเป็น 5 ขั้นตอนคือ ขั้นก่อนวิธีการ ขั้นของหนึ่งวิธีการ ขั้นมากกว่าหนึ่งวิธีการ ขั้นการเห็นวิธีการโดยรวมจากวิธีการต่าง ๆ ขั้นทำความเข้าใจกระบวนการเป็นความคิดรวบยอด



ภาพที่ 5 กลไกการสร้างความคิดรวบยอด (ก่อนวิธีการ-วิธีการ-หลากหลายวิธีการ-กระบวนการ-ความคิดรวบยอด) (Tall, 2006)

Tall and Isoda (2007) พัฒนาและปรับรูปแบบขั้นตอนการดำเนินการกลั่นแนวคิดให้กลายเป็นความคิดรวบยอดเพื่อให้สอดคล้องกับชั้นเรียนคณิตศาสตร์และมองเห็นอย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น ประกอบไปด้วย 4 ขั้นตอนคือ

1) การใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา (procedure)

2) การใช้วิธีการที่แตกต่างกันอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา (multi-procedure)

3) การตระหนักถึงวิธีการที่แตกต่างกันนี้ให้ผลลัพธ์เดียวกัน (a process)

4) การเกิดความคิดรวบยอด (a concept)

Suthisung (2011) ได้เสนอแนะการขยายขั้นตอนการดำเนินการกลั่นแนวคิดจาก 4 ขั้นตอน ออกเป็น 5 ขั้นตอน และในขั้นตอนที่ 5 มีบทบาทสำคัญนอกเหนือจากการสร้างความคิดรวบยอดแล้ว ยังเป็นขั้นที่นำความคิดรวบยอดที่เกิดขึ้นไปใช้เพื่อคิดต่อหรือนำไปใช้เพื่อขยายโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ แต่ละขั้นมีรายละเอียด ดังนี้

1. การใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา (A Procedure)

2. การใช้วิธีการต่าง ๆ ที่หลากหลายในการแก้ปัญหา (Multi-procedure)

3. การพิจารณาถึงวิธีการต่าง ๆ ที่แตกต่างกันอย่างหลากหลายให้ผลลัพธ์เดียวกัน (A process)

4. การแสดงผลลัพธ์เดียวกันที่เกิดขึ้นนี้จากวิธีการที่หลากหลาย (A Thinkable concept)

5. การตระหนักถึงวิธีการต่าง ๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาซึ่งให้ผลลัพธ์เดียวกัน และนำแนวคิดที่เกิดขึ้นร่วมกันนี้ไปแก้ปัญหาใหม่หรือนำไปใช้เพื่อสร้างความรู้ใหม่ (Revise Thinkable Concept)

บทความนี้นำเสนอตัวอย่างการวิเคราะห์ให้เห็นถึงกลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยแนวคิดของ Suthisung (2011) ซึ่งมี 5 ขั้นตอน ที่เกิดขึ้นในรายวิชาแคลคูลัส 1

ตัวอย่างการกลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์

(การหาค่าอนุพันธ์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาเคมีสิ่งทอ คณะออกแบบสิ่งทอและแฟชั่น มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ประจำปีการศึกษา 1/2556)

<u>โจทย์</u>: กำหนด $y = \dfrac{\left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5}{\sqrt[4]{3x-4}}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

นักศึกษาคนที่ 1:

วิธีคิด $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5}{\sqrt[4]{3x-4}} = \frac{d}{dx}\frac{\left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5}{(3x-4)^{\frac{1}{4}}}$

$$= \frac{(3x-4)^{\frac{1}{4}}\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5 - \left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5\frac{d}{dx}(3x-4)^{\frac{1}{4}}}{(3x-4)^{\frac{1}{4}\,2}}$$

$$= \left(\frac{(3x-4)^{\frac{1}{4}}\left(x^2+1\right)^3\frac{d}{dx}(2x-1)^5 + (2x-1)^5\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)^3 - \left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5\frac{1}{4}(3x-4)^{\frac{-3}{4}}\frac{d}{dx}(3x-4)}{\left((3x-4)^{\frac{1}{4}}\right)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{(3x-4)^{\frac{1}{4}}\left(x^2+1\right)^3 5(2x-1)^4\frac{d}{dx}(2x-1) + (2x-1)^5 3\left(x^2+1\right)^2\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right) - \left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5\frac{1}{4}(3x-4)^{\frac{-3}{4}}\frac{d}{dx}(3x-4)}{\left((3x-4)^{\frac{1}{4}}\right)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{(3x-4)^{\frac{1}{4}}\left(x^2+1\right)^3 5(2x-1)^4(2-0) + (2x-1)^5 3\left(x^2+1\right)^2(2x+0) - \left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5\frac{1}{4}(3x-4)^{\frac{-3}{4}}(3-0)}{\left((3x-4)^{\frac{1}{4}}\right)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{10(3x-4)^{\frac{1}{4}}\left(x^2+1\right)^3(2x-1)^4 + 6x(2x-1)^5\left(x^2+1\right)^2 - \frac{3}{4}\left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5(3x-4)^{\frac{-3}{4}}}{\left((3x-4)^{\frac{1}{2}}\right)}\right)$$

นักศึกษาใช้สูตร $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ ในการหาค่าอนุพันธ์

นักศึกษาคนที่ 2:

วิธีคิด take(ln) ทั้งสองข้างของสมการได้ $\ln y = \ln\left(\frac{\left(x^2+1\right)^3(2x-1)^5}{(3x-4)^{\frac{1}{4}}}\right)$

$$\ln y = \ln\left(x^2+1\right)^3 + \ln(2x-1)^5 - \ln(3x-4)^{\frac{-1}{4}}$$

$$\ln y = 3\ln\left(x^2+1\right) + 5\ln(2x-1) - \frac{1}{4}\ln(3x-4)$$

take $\frac{d}{dx}$ ทั้งสองข้างของสมการได้ $\frac{d}{dx}\ln y = 3\frac{d}{dx}\ln\left(x^2+1\right) + 5\frac{d}{dx}\ln(2x-1) - \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\ln(3x-4)$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(x^2-1)}\frac{d}{dx}(x^2+1) + \frac{5}{2x-1}\frac{d}{dx}(2x-1) + \frac{1}{4}\frac{1}{3x-4}\frac{d}{dx}(3x-4)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(x^2-1)}(2x) + \frac{5}{2x-1}(2) + \frac{1}{4}\frac{1}{(3x-4)}(3)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{6x}{(x^2-1)} + \frac{10}{2x-1} + \frac{1}{4}\frac{3}{(3x-4)}\right)$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{(\mathrm{x}^2+1)^3(2\mathrm{x}-1)^5}{\sqrt[4]{3\mathrm{x}-4}}\left(\frac{6\mathrm{x}}{(\mathrm{x}^2-1)} + \frac{10}{2\mathrm{x}-1} + \frac{1}{4}\frac{3}{(3\mathrm{x}-4)}\right)\text{------\#}$$

นักศึกษาใช้คุณสมบัติของผลบวกและผลต่างของ ln การ $take\frac{d}{dx}$ ทั้งสองข้างของการหาอนุพันธ์ และการแทนค่า y กลับไปในการหาค่าอนุพันธ์

เรียนรู้มาก่อนหน้านี้ ซึ่งเป็นแนวคิดของการหาอนุพันธ์ผลหารเบื้องต้น นอกจากนี้นักศึกษาที่หาค่าอนุพันธ์โดยใช้ความรู้ของการทำให้เท่ากันทั้งสองข้างของสมการโดยการนำคุณสมบัติของ มาใช้ในการแยกผลหารและผลคูณของนิพจน์ให้เป็นทั้งบวกและลบ แล้วจึงดำเนินการใช้ค่าอนุพันธ์ของ มาใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ต่อไป วิธีการคิดของนักศึกษาแสดงให้เห็นว่านักศึกษานำแนวคิดที่ได้เรียนรู้มาก่อนมาใช้เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ใหม่ในการหาคำตอบของอนุพันธ์ในรูปผลหารที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

จากการสร้างแนวคิดของนักศึกษาที่เกิดขึ้นสามารถวิเคราะห์กลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ได้ ดังตารางที่ 2 ดังนี้

ตารางที่ 2 กลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนการสร้างความคิดรวบยอด	**กระบวนการคิดขั้นสูง**
1. การใช้วิธีการเดียว (a procedure)	-การใช้ผลหารของการหาอนุพันธ์มาหาคำตอบ $=\left(\frac{(3x-4)^{\frac{1}{4}}\frac{d}{dx}(x^2+1)^3(2x-1)^5-(x^2+1)^3(2x-1)^5\frac{d}{dx}(3x-4)^{\frac{1}{4}}}{\left((3x-4)^{\frac{1}{4}}\right)^2}\right)$
2. การใช้วิธีการที่หลากหลาย (multi-procedure)	-การใช้คุณสมบัติผลบวกและผลต่างของ ln $\ln y=\ln(x^2+1)^3+\ln(2x-1)^5-\ln(3x-4)^{\frac{-1}{4}}$ แล้ว $take\frac{d}{dx}$ เพื่อแทนค่า y กลับไปในการหาคำตอบของอนุพันธ์ุ ซึ่งเป็นวิธีการที่แตกต่างจากวิธีแรก
3. การใช้วิธีการทั่วไป (a common procedure)	-การหาค่าอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปที่สามารถใช้ผลหาร ผลคูณ หรือ $take(\ln)$ เพื่อหาค่าอนุพันธ์ ซึ่งได้คำตอบเดียวกัน คือ $\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)^3(2x-1)^5}{\sqrt[4]{3x-4}}\left(\frac{6x}{(x^2-1)}+\frac{10}{2x-1}+\frac{1}{4}\frac{3}{(3x-4)}\right)$
4. การเกิดแนวคิด (a concept)	-การพิจารณาถึงวิธีการในการหาคำตอบที่แตกต่างกันแต่ได้ผลลัพธ์เดียว ซึ่งเป็นวิธีการที่สำคัญในการหาคำตอบที่มีลักษณะเดียวกัน

ขั้นตอนการสร้างความคิดรวบยอด	กระบวนการคิดขั้นสูง
5. การนำแนวคิดไปใช้ (a revise thinkable concept)	-การนำวิธีการหาค่าอนุพันธ์ไปใช้เพื่อหาคำตอบของปัญหาใหม่ เช่น การหาค่าอนุพันธ์ของ $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}(3x+5)^3}{\sqrt[2]{3x-1}}$
	-การหาค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลหารของอนุพันธ์ และการใช้สมบัติของ $\ln$ มาใช้หาค่าอนุพันธ์

นักศึกษามีวิธีการคิดของตนเองซึ่งเป็นวิธีการเริ่มต้นทีละขั้นตอน และมีนักศึกษาที่คิดวิธีการที่แตกต่างกันอย่างเป็นขั้นตอน ส่งผลให้นักศึกษาพิจารณาถึงคำตอบของตนเองและคำตอบของเพื่อนซึ่งมีวิธีการที่แตกต่างกันแต่ได้คำตอบเท่ากัน นักศึกษาเกิดการยอมรับวิธีการที่แตกต่างจากวิธีการของตนเองและพิจารณาถึงวิธีการที่สำคัญที่นำมาใช้ในการหาคำตอบซึ่งเป็นวิธีการที่ง่าย สะดวกและชัดเจน ทำให้นักศึกษาตระหนักหรือเล็งเห็นถึงความสำคัญของวิธีการที่เกิดขึ้นที่นำมาใช้ในการหาคำตอบหรือที่สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่อไปได้

กลไกการสร้างความคิดรวบยอดในคณิตศาสตร์ขั้นสูงมีลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่องกันของกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์จากการใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหาซึ่งอาจนำแนวคิดที่มีมาก่อนหน้านั้นมาใช้ มาสู่การใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหาโดยอาจเป็นการผสมผสานความรู้ใหม่และแนวคิดที่มีมาก่อนมาใช้เพื่อหาคำตอบ และนำไปสู่การตระหนักถึงวิธีที่แตกต่างกันในการหาคำตอบซึ่งให้ผลลัพธ์เดียวกันและการเล็งเห็นถึงวิธีการที่สำคัญในการหาคำตอบ และนำวิธีการในการหาคำตอบไปแก้ปัญหาใหม่

สรุป

กลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์พิจารณาได้จากกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบที่มีลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่องกันของการดำเนินการกลั่นแนวคิดในกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดจากการพัฒนาวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาและนำไปสู่ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ กลไกการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์แบ่งเป็น 5 ขั้นตอน คือ การใช้วิธีการเดียวในการหาคำตอบ การใช้วิธีการที่หลากหลายในการหาคำตอบ การใช้วิธีการทั่วไปในการคำตอบ การพิจารณาถึงวิธีการทั่วไปนี้เป็นแนวคิดที่สำคัญในการหาคำตอบ และการนำแนวคิดที่เกิดขึ้นไปใช้แก้ปัญหาใหม่ การนำความรู้พื้นฐานหรือความคิดรวบยอดที่ได้เรียนมาก่อนหน้านั้นมาใช้ในการแก้ปัญหาหรือสร้างความคิดรวบยอดใหม่ ช่วยสนับสนุนวิธีการคิดที่แตกต่างกันเมื่อให้โอกาสผู้เรียนได้นำเสนอแนวคิดของตนเองหน้าชั้นเรียน ผู้เรียนจะเห็นแนวคิดของเพื่อนที่แตกต่างกัน และทำให้ผู้เรียนพิจารณาแนวคิดที่สำคัญที่เกิดขึ้นที่ใช้ร่วมกันในการแก้ปัญหาหรือหาคำตอบ

การจัดการเรียนการสอนที่เปิดโอกาสให้นักศึกษาได้คิดอย่างอิสระ และนำแนวคิดของตนเองมาใช้ในการแก้ปัญหาหรือหาคำตอบจะทำให้นักศึกษาพัฒนาการคิดของตนเองอย่างมีประสิทธิภาพและเห็นความสำคัญการคิดของตนเอง นอกจากนี้ยังสามารถพิจาณาถึงแนวคิดที่สำคัญที่นำไปใช้ร่วมกันในการแก้ปัญหาใหม่ได้ต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนครที่กรุณาให้การสนับสนุนการเขียนบทความฉบับนี้

เอกสารอ้างอิง

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction In Advanced Mathematical Thinking. In D.O. Tall (Ed). **Advanced Mathematical** Thinking. (pp.95-123). Dorfrecht: Kluwer.

Gray, E., & Tall, D.O. (1991). Duality, Ambiguity &Flexibility in Successful Mathematical Thinking. **PME15 Assisi, 2,** 72-79.

Gray, E., & Tall, D.O. (1992). Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. **Mathematics Teaching, 14**(142), 6-10.

Gray, E., & Tall, D.O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Perceptual View of Simple Arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education, 26**(2), 115-141.

Gray, E., & Tall, D.O. (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. **Proceedings of the 26thAnnual Meeting for the Psychology of Mathematics Education.** (Vol. 1, 115-120). UK: University of Warwick.

Gray, E., & Tall, D.O. (2007). Abstraction as a Natural Process of Mental Compression. **Mathematics Education Research Journal 2007, 19**(2), 23-40.

Greeno, G.J. (1983). Conceptual entities in Genter, D. & Stevens, A.L. (Eds.). **Mental Models.** 227-252.

Rosana, N.L., & Tall, D.O. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. **Education Studies in Mathematics, 67,** 3-18.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.**

Skmep, R.R. (1979). **Intelligence, Learning, and Action.** London: Wiley.

Suthisung, N. (2011). The Relation between Real World and Mathematical World through the Process of Abstraction Focusing on Perception, Action and Reflection. **Proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education EARCOME5.** (pp.292-299). Tokyo: National Institute of Informatics (NII).

Tall, D.O. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, **Mathematics Teaching, 82,** 44– 49.

Tall, D.O. (1991). Reflection in **Advanced Mathematical Thinking,** Kluwer: Holland, 251– 259.

Tall, D.O. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira e D. Carraher (Eds.). **Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.** (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brazil.

Tall, D.O. (2006). A Theory of Mathematical Growth Through Embodiment, Symbolism, and Proof. **Annales de Didactigue et de SCIENCES COGNITIVE, 11,** 195-215.

Tall, D.O., & Gray, E., Ali, B.M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., Yusof, Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1,** 81-104.

Tall, D.O., & Isoda, M. (2007). **Long-Term Development of Mathematical Thinking And Lesson Study.** UK: University of Warwick.

Tall, D.O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, **Educational Studies in Mathematics,** 12 (2), 151– 169.

Thurston, W. P. (1991). Mathematical Education. **Notices of the American Mathematical Society,** 37, 7, 844– 850.

Waston, A. (2002). Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth. **In Proceeding of the 26th conference of the international group for the psychology of mathematics education.** (Vol. 4, pp.369-376). UK: Norwich.