การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานเพื่อส่งเสริมทักษะการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

Developing Problem-Based Learning Activities to Raise Mathematical Representation Skills on Graph and Linear Relationship of Matthayomsueksa 1 Students

ลิขิต เสนรังสี[1] และน้ำทิพย์ องอาจวาณิชย์[2]
Likit Senrangsee[1] and Namthip Ongardwanich[2]

[1]การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
[1]Master of Education Program in Mathematics Education, Faculty of Education, Naresuan University
[2]ภาควิชาบริหาร วิจัย และพัฒนานวัตกรรมทางการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
[2]Department of Educational Administration and Development, Faculty of Education, Naresuan University
E-mail: arabikitg@gmail.com, namthipo@nu.ac.th
Received: May 5, 2024; Revised June 24, 2024; Accepted: June 25, 2024

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่ส่งเสริมการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่องกราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2) เพื่อศึกษาและส่งเสริมการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน โดยมีผู้เข้าร่วมของการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566 จำนวน 32 คน ของโรงเรียนประจำอำเภอขนาดใหญ่แห่งหนึ่งในจังหวัดพิจิตร โดยใช้เวลาทั้งหมด 12 ชั่วโมง เครื่องมือที่ใช้ได้แก่ 1) แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ จำนวน 3 แผน และใบกิจกรรม โดยมีความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด 2) แบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ มีความตรงเชิงเนื้อหาทุกข้อสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์ วิเคราะห์ข้อมูลด้วยการให้คะแนนแบบแยกประเด็นตามด้านของการแสดงแทน 3 ด้าน ได้แก่ การเขียนข้อความ การวาดและอธิบายรูปภาพ และการใช้สัญลักษณ์

ผลการวิจัยพบว่า

1. แนวทางการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่ส่งเสริมการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่องกราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ควรเลือกปัญหาปลายเปิดที่มีความน่าสนใจ มีแนวความคิดที่หลากหลายและมีความท้าทายและครูควรกระตุ้นให้นักเรียนนำความรู้เดิมเข้ามาใช้เพื่อแก้ปัญหา วิเคราะห์ความเหมาะสมของคำตอบ นำเสนอและแลกเปลี่ยนเรียนรู้กันในชั้นเรียนเพื่อให้ได้ความรู้ใหม่

2. ในการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ ทั้งในใบกิจกรรมและแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์พบการสื่อสารแบบข้อความและสัญลักษณ์ในระดับเริ่มต้น แต่ไม่พบการแสดงแทนด้วยรูปภาพแล้วอธิบายออกมา

คำสำคัญ: การจัดการเรียนรู้ การเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

Abstract

The purposes of this research were: 1) study Problem-based learning methods that enhance mathematical representations on graphs and linear relationships of Matthayomsueksa 1 students and 2) to study and raise the mathematical representations of Matthayomsueksa 1 students who received Problem-

based Learning. The participants of this research were 32 students of Matthayomsueksa 1 in 2nd Semester, academic year 2023 at a large district school in Phichit Province. It took a total of 12 hours. The tools used for research were 1) 3 learning activity plans, activity sheets, with the appropriateness of the learning activity plans being in the highest criteria and 2) a mathematical representation test that all items were content valid and consistent with the contents and purposes. The data was analyzed using analytical scoring according to 3 aspects of representation: text writing; drawing and describing pictures and the use of symbols.

The research findings were as follows.

1. A Problem-based Learning management approach that develops mathematical representations on graphs and linear relationships for Matthayomsueksa 1, students should choose interesting open- end problems, various concepts and challenges, and teachers should encourage students to use their previous knowledge to solve problems, analyze the appropriateness of the answer, present and exchange knowledge in class to gain new knowledge.

2. In mathematical representations of both in three activity sheets and in the mathematics representation test was found text and symbol communication at the beginner level, but wasn't found a representation with any pictures with explanation.

Keywords: Learning Management, Problem-Based Learning, Mathematical Representation

บทนำ

ผลการประเมินโครงการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ (Programme for International Student Assessment : PISA) ในวิชาคณิตศาสตร์ ประเทศไทยได้คะแนนเฉลี่ยต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยโดยตลอด นับตั้งแต่การสอบ PISA 2009, PISA 2012, PISA 2015, PISA 2018 อยู่ที่ 419 คะแนน 427 คะแนน 415 คะแนน และ 419 คะแนนตามลำดับ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2564) สอดคล้องกับคะแนนเฉลี่ยของการทดสอบการศึกษาระดับชาติระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ในปีการศึกษา 2561 ถึงปีการศึกษา 2565 พบว่านักเรียนได้คะแนนเฉลี่ย 30.04 คะแนน, 26.73 คะแนน, 25.46 คะแนน, 24.47 คะแนน และ 24.39 คะแนนตามลำดับ เนื่องจากการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ในอดีตเพียงแต่มุ่งให้นักเรียนได้รับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เน้นเนื้อหาและการทำงานตามขั้นตอนหรือกระบวนการที่ครูยกตัวอย่างหรือทำให้ดูเท่านั้น (อัมพร ม้าคนอง, 2559) และแนวโน้มของคะแนนเฉลี่ยของแต่ละปีจะมีแนวโน้มที่ต่ำลง ยิ่งไปกว่านั้น เมื่อพบปัญหาที่เป็นสถานการณ์ซับซ้อน ไม่คุ้นเคย หรือต้องใช้การแปลความหมายทางคณิตศาสตร์ นักเรียนอาจไม่สามารถใช้ขั้นตอนทางคณิตศาสตร์ที่คุ้นเคยแก้ปัญหาได้ (อัมพร ม้าคนอง, 2558)

ปัญหาจากการพบเห็นในชั้นเรียนส่วนใหญ่มาจากการที่นักเรียนมองไม่เห็นความสำคัญของคณิตศาสตร์ มองว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ไกลตัว ไม่สามารถนำมาใช้ได้ในชีวิตประจำวัน เป็นเรื่องที่เป็นนามธรรม เข้าใจได้ยาก เมื่อพบกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ถือว่าเป็นสถานการณ์จำลองที่สร้างจากปัญหาที่สามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน และถือว่าเป็นสิ่งสำคัญที่ควรจะได้รับการพัฒนาให้นักเรียนได้ฝึกคิดฝึกทดลองแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น เพราะการฝึกแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ย่อมมีส่วนในการช่วยส่งเสริมลำดับการคิด กระบวนการคิด และกระบวนการทำงานของผู้เรียน อันจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้และกระบวนการเรียนรู้ที่ได้นี้ไปใช้ในแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ ดังนั้น ถ้าผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดี ก็น่าจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันด้วยเช่นกัน (อรชร ภูบุญเติม, 2550)

การที่จะทำให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น สามารถใช้การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Representation) เข้ามาเพื่อให้นักเรียนแก้ปัญหาได้ดี บรูเนอร์ (Bruner) นักจิตวิทยาแนวพุทธิปัญญานิยมได้กล่าวถึง

พัฒนาการทางปัญญาว่าผู้เรียนจะเข้าใจในความคิดรวบยอด (Concept) ได้ หากเขาสามารถถ่ายทอดความรู้ความเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่สัญลักษณ์หรือภาษาได้ (สุรางค์ โค้วตระกูล, 2559) การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะที่จำเป็นอย่างยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งมีที่มาจากทักษะการนำเสนอข้อมูล ซึ่งเป็นหนึ่งในห้าทักษะของมาตรฐานสาระด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดโดยสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (ดวงมณี ยะอัมพันธุ์, 2565) มีความสัมพันธ์กันอย่างแยกไม่ออกกับทักษะการสื่อสาร เนื่องจากเป็นการแทนสัญลักษณ์ หรือการรวมกันของสัญลักษณ์ ตัวอักษร แบบภาพ (Diagram) วัตถุหรือแผนภูมิ เพื่อใช้สื่อสารทางความคิด ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้หลากหลายรวมถึงการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้ (Mainali, 2021) การใช้การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สภาครูแห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics; NCTM) ได้กำหนดไว้ในมาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards) ที่มีอยู่ 5 มาตรฐาน ได้แก่ การแก้ปัญหา (Problem Solving) การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning and Proof) การสื่อสาร (Communication) การเชื่อมโยง (Connection) และการแสดงแทน (Representation) โดยสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (พรรณทิภา ทองนวล, 2554) ได้อธิบายถึงมาตรฐานการใช้ตัวแทนว่า การใช้ตัวแทนเป็นสิ่งจำเป็นที่จะทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในความคิดรวบยอดและความสัมพันธ์ อีกทั้งทำให้ผู้เรียนสื่อสารวิธีการทางคณิตศาสตร์ ข้อโต้แย้ง และความเข้าใจต่าง ๆ ไปสู่บุคคลอื่นได้

ในปัจจุบัน การจัดการเรียนการสอนที่เป็นที่กระแสในปัจจุบันรูปแบบหนึ่ง คือการจัดการกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นให้ผู้เรียนได้ใช้กระบวนการคิดและการจัดการเพื่อให้คิดค้น ค้นคว้า แก้ปัญหาด้วยตนเอง และเป็นกลุ่ม ลักษณะการจัดกิจกรรมจะต้องก่อให้เกิดการเรียนรู้ที่มีประโยชน์ในชีวิตจริง เน้นฝึกทักษะการสืบเสาะหาความรู้ด้วยวิธีที่หลากหลาย ให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็น ทั้งการคิดและการจัดการ มุ่งให้ผู้เรียนเรียนรู้อย่างมีความสุข สนุกกับการคิด สามารถสร้างองค์ความรู้ ได้ใช้กระบวนการกลุ่มระดมความคิด ร่วมกันอภิปราย วิเคราะห์ วางแผนหาแนวทางปฏิบัติ เพื่อการเรียนรู้และพัฒนาส่งเสริมศักยภาพ (พิชญ์สินี ชมภูคำ, 2547) สอดคล้องกับบทความของสิริพร ทิพย์คง (2562) ซึ่งได้แนะนำว่าการสอนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นต่าง ๆ นั้นมีความแตกต่างกัน สำหรับการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา รวมถึงในระดับที่สูงขึ้นต้องอาศัยความรู้พื้นฐานที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว

สำหรับรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่เป็นที่นิยม คือการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน (Problem-based Learning) ซึ่งมีรากฐานมาจากทฤษฎีการเรียนรู้ของ Piaget และ Vygotsky ที่เชื่อว่าการเรียนรู้เป็นกระบวนการพัฒนาทางสติปัญญาที่ผู้เรียนเป็นผู้สร้างความรู้ด้วยตนเอง กระบวนการสร้างความรู้เกิดจากการที่ผู้เรียนมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมและเกิดการซึมซับหรือดูดซึมประสบการณ์ใหม่ และปรับโครงสร้างสติปัญญาให้เข้ากับประสบการณ์ใหม่ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีการเรียนรู้ด้วยการค้นพบของ Bruner ซึ่งเชื่อว่าการเรียนรู้ที่แท้จริงมาจากการค้นพบของแต่ละบุคคลโดยผ่านกระบวนการสืบเสาะความรู้ในกระบวนการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน เมื่อผู้เรียนเผชิญกับปัญหาที่ไม่รู้ ทำให้ผู้เรียนเกิดความขัดแย้งทางปัญหาและผลักดันให้ผู้เรียนไปแสวงหาความรู้ และนำความรู้ใหม่มาเชื่อมโยงความรู้เดิมเพื่อแก้ปัญหา ซึ่งมีหลัก 3 ประการ คือ 1) ความรู้เดิม (Prior Knowledge) 2)การเสริมความรู้ใหม่ (Encoding Specificity) และ 3) การต่อเติมความเข้าใจให้สมบูรณ์ (Elaboration of Knowledge) (พระพันธวัฒน์ ธมฺมวฑฺฒโน และวิทยา ทองดี, 2565) และสอดคล้องกับเดลิเซล (Lestari, Kesumawati and Ningsih, 2020) ว่าการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานมีข้อได้เปรียบที่นักเรียนถูกกระตุ้นให้มีความสามารถในการแก้ปัญหาผ่านจากการเรียนรู้กิจกรรมจากปัญหาที่คุ้นเคยในชีวิตจริง นักเรียนสามารถสร้างความรู้ผ่านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นไปยังปัญหา กิจกรรมที่ระบุไว้เกิดขึ้นในกลุ่มโดยใช้แหล่งความรู้ที่หลากหลาย และสามารถเอาชนะความยากของนักเรียนผ่านบริบทในกิจกรรม

Utami, Junaedi and Hidayah (2018) ได้เลือกกิจกรรมการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน เพื่อพัฒนาการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์และการเรียนรู้ เพื่อให้นักเรียนเกิดข้อค้นพบและแนวคิดที่นักเรียนได้เรียน โดยอ้างอิงจากงานวิจัยดังกล่าวว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานจะมุ่งไปยังหลักการและแนวคิดของวินัยและการมีส่วนรวมของนักเรียนในการแก้ปัญหา และงานที่มีความหมาย เป็นการกระตุ้นให้นักเรียนดำเนินการสร้างความรู้ในชั้นเรียนอย่างมีอิสระ

โดยมีรายละเอียดว่าขั้นตอนการมีปฏิสัมพันธ์ของการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน นักเรียนจะได้รับโอกาสในการฝึกฝนแนวคิดในการสื่อสาร กลยุทธ์ หรือกระบวนการสำหรับการแก้ไขปัญหาทั้งในด้านคำพูด การเขียนและการวาดรูป สอดคล้องกับบทความของ O'Brien, Wallach and Mash-Duncan (2011) ว่าแบบจำลองของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน (PBL) นำเสนอปัญหาตามบริบท เพื่อให้นักเรียนมีทักษะการวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา และจะเป็นสะพานที่เชื่อมต่อระหว่างทฤษฎีและการประยุกต์ใช้อย่างเป็นมิตร

จากประเด็นที่กล่าวมาทั้งหมด ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับการนำวิธีการนำวิธีการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานเพื่อศึกษาการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องกราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เพื่อแสดงให้เห็นถึงการนำเนื้อหาไปใช้ในชีวิตจริง การแสดงออกถึงการแก้ปัญหาของเด็กนักเรียนและนำไปพัฒนาปรับปรุงการจัดการเรียนรู้ และเป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ในเนื้อหาดังกล่าวต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่ส่งเสริมการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1
2. เพื่อศึกษาและส่งเสริมการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงปฏิบัติการโดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงปฏิบัติการ (Action Research) ดำเนินการเป็นวงจรปฏิบัติการที่ต่อเนื่องกัน ตามแนวคิดของ Kemmis (สุวิมล ว่องวาณิช, 2557) ประกอบด้วย 4 ขั้นตอนในแต่ละวงจรประกอบด้วย 4 ขั้นตอนแต่ละวิจัย ประกอบด้วย

1. ขั้นวางแผน (Plan; P)
2. ขั้นปฏิบัติการ (Act; A)
3. ขั้นสังเกตการณ์ (Observe; O)
4. ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect; R)

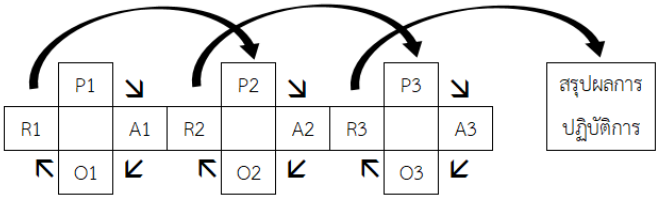
โดยเมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้มาถึงขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ ผู้วิจัยจะนำข้อมูลที่ได้จากขั้นนี้มาสรุปเป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้ในขั้นวางแผนของวงจรการปฏิบัติการถัดไปจนครบวงจรปฏิบัติการที่กำหนดทั้งหมด 3 วงจร ดังนี้

วงจรที่ 1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง คู่อันดับและกราฟ

วงจรที่ 2 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง กราฟและการนำไปใช้

วงจรที่ 3 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง ความสัมพันธ์เชิงเส้น

ลักษณะของวงจรทั้ง 3 แสดงดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงวงจรการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้เป็นการวิจัยในชั้นเรียนตามแบบของ Kemmis (สุวิมล ว่องวานิช, 2557) ซึ่งดำเนินการเป็นวงจรปฏิบัติการที่ต่อเนื่องกัน แต่ละวงจร ประกอบด้วยขั้นวางแผน (Plan) ขั้นปฏิบัติการ (Act) ขั้นสังเกตการณ์ (Observe) และขั้นสะท้อนผล (Reflect) ตามลำดับ โดยดำเนินการวิจัยทั้งหมด 3 วงจรปฏิบัติการ โดยเมื่อดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ถึงขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ ผู้วิจัยจะนำข้อมูลที่ได้นี้มาสรุปเป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้ในขั้นวางแผนของวงจรปฏิบัติการถัดไปจนครบจำนวนวงจรปฏิบัติการที่กำหนด

ผู้เข้าร่วมการวิจัย

ผู้วิจัยเลือกผู้เข้าร่วมวิจัยแบบสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยการจับฉลากห้อง จากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 5 ห้อง ได้กลุ่มผู้ร่วมวิจัยเป็นเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1/1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566 โรงเรียนประจำอำเภอขนาดใหญ่แห่งหนึ่งในจังหวัดพิจิตร จำนวน 32 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูลที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การวิจัยแสดงได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูลจำแนกตามจุดประสงค์การวิจัย

จุดประสงค์การวิจัย	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
1. เพื่อศึกษาแนวทางการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่ส่งเสริมการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1	- แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน เรื่องกราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น - แบบสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้
2. เพื่อศึกษาและส่งเสริมการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน	- แบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ - ใบกิจกรรม - แบบสัมภาษณ์

ในการหาคุณภาพของแผนการจัดการเรียนรู้และใบกิจกรรม ได้รับประเมินความเหมาะสม โดยมีผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ในด้านคณิตศาสตร์ศึกษา ด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ และด้านการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่ไม่ต่ำกว่า 10 ปี ให้พิจารณาและประเมินความเหมาะสมขององค์ประกอบของแผนการจัดการเรียนรู้แล้วนำมาหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็น 4.56 และ .22 อยู่ในเกณฑ์ระดับความเหมาะสมมากที่สุด

สำหรับการหาคุณภาพของแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ฯ ประกอบไปด้วยแบบวัดทั้ง 3 ข้อ ได้รับการประเมินโดยใช้แบบวัดความตรงเชิงเนื้อหาทั้ง 3 ข้อ ได้ค่าความตรงเชิงเนื้อหาเป็น +1.00 ทุกข้อ นั่นคือแบบวัดทั้งสามข้อสอดคล้องกับเนื้อหาที่ตรงกับจุดประสงค์ในการวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

การเก็บรวมรวมข้อมูลและวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยนำคะแนนที่ได้ของนักเรียนจากการทำแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ ใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ มาวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ โดยมีรายละเอียดในการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

1. ศึกษาการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เป็นรายบุคคล จากแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ โดยตรวจให้คะแนนจากแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนแต่ละคนตามเกณฑ์ที่สร้างขึ้น จากนั้นจำแนกข้อความและรูปภาพที่ปรากฏในแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ที่ได้ ออกเป็น 3 ด้าน ได้แก่ 1) การเขียนข้อความ 2) การแสดงแทนภาพ 3) การอธิบายเชิงคณิตศาสตร์ วิเคราะห์ข้อมูลด้วยการนับจำนวนความถี่ของข้อความและรูปภาพที่ปรากฏ และคำนวณหาค่าร้อยละ เพื่ออ้างอิงไปยังพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในแต่ละด้าน เพื่อให้เห็นการเปลี่ยนแปลงของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

2. ศึกษาการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรม โดยผู้วิจัยตรวจให้คะแนนจากใบกิจกรรมตามเกณฑ์ที่อ้างอิง จากนั้นจำแนกออกเป็น 3 ด้าน ได้แก่ 1) การเขียนข้อความ 2) การแสดงแทนภาพ 3) การอธิบายเชิงคณิตศาสตร์ วิเคราะห์คำตอบของนักเรียนว่าแสดงออกถึงการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ได้หรือไม่ พร้อมทั้งเขียนพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกเป็นความเรียง

3. การวิเคราะห์ข้อมูลจากการสัมภาษณ์ กระทำในช่วง 2 เวลา คือ ก่อนเรียนและหลังเรียน โดยทั้งสองช่วงเวลาจะสัมภาษณ์นักเรียนหลังจากตรวจให้คะแนนการทำแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยนำผลที่ได้จากแบบสัมภาษณ์มาสนับสนุนข้อความที่ปรากฏในแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ตอบคำถามได้คลุมเครือหรือได้คำตอบไม่ชัดเจน เพื่อให้เห็นการเปลี่ยนแปลงของพัฒนาการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

สรุปผลการวิจัย

1. แนวทางการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่ส่งเสริมการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

จากการเก็บข้อมูลวิจัยทั้งหมด 3 วงจรปฏิบัติการ ผู้วิจัยพบว่าแนวทางที่เหมาะสมในการจัดกิจกรรมโดยใช้ปัญหาเป็นฐาน ปัญหาที่พบในชั้นเรียนและแนวทางการปรับปรุง รวมถึงประเด็นที่ควรเน้น นำมาสรุปรวมเป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่ส่งเสริมการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ซึ่งจำแนกเป็นบทบาทครูและนักเรียนในแต่ละกระบวนการของการจัดการเรียนรู้เพื่อเป็นประโยชน์ต่อครูที่สนใจการจัดการเรียนรู้ดังกล่าว ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 บทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละกระบวนการของการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานเพื่อส่งเสริมการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

กระบวนการ	บทบาทของครู	บทบาทของนักเรียน
กระบวนการที่ 1 การระบุถึงปัญหาที่พบ	ครูมอบหมายปัญหาที่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่จะสอน มีความน่าสนใจ มีความคิดที่หลากหลายและมีความท้าทายในการแก้ปัญหา คำถามที่ใช้ควรเป็นปัญหาปลายเปิด	ระบุปัญหาที่ได้สืบเสาะหรือได้รับมอบหมายจากครู ว่าปัญหาคืออะไร สามารถแก้ปัญหาได้อย่างไร แล้วคำตอบที่ได้ออกมานั้นควรมีลักษณะอย่างไร
กระบวนการที่ 2 การวิเคราะห์ปัญหาและเรียนรู้ประเด็นปัญหา	ครูกระตุ้นให้นักเรียนเรียนรู้และวิเคราะห์ว่าปัญหาที่พบเจอในสถานการณ์นี้สามารถนำความรู้ที่ใช้มาช่วยแก้ปัญหาได้อย่างไร และจะแก้ปัญหาโดยใช้การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ด้านไหน อย่างไร หากนักเรียนมีปัญหาเรื่องภาษาที่ใช้ ครูควรเกลาภาษาให้ด้วย	นักเรียนวิเคราะห์ปัญหา พร้อมทั้งระบุว่าจากปัญหาที่ให้มานั้น เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่ได้เรียนมาอย่างไร และจะแก้ปัญหาได้อย่างไร มีการแสดงแทนใดบ้างที่สามารถใช้แก้ปัญหาได้บ้าง
กระบวนการที่ 3 การค้นพบและรายงานผล	ครูแนะนำและกระตุ้นให้นักเรียนหาคำตอบจากวิธีที่ได้เรียนรู้ว่าเหมาะสมหรือไม่	นักเรียนแก้ปัญหาโดยใช้วิธีที่เรียนรู้มา ผ่านกระบวนการคิดวิเคราะห์ โดยใช้การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมจนได้คำตอบ นำมาตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาดังกล่าวว่าถูกต้องเหมาะสมหรือไม่ อย่างไร

ตารางที่ 2 บทบาทของครูและนักเรียนในแต่ละกระบวนการของการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานเพื่อส่งเสริมการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (ต่อ)

กระบวนการ	บทบาทของครู	บทบาทของนักเรียน
		หากได้คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เหมาะสม ควรแก้ปัญหาด้วยวิธีอื่น ๆ
กระบวนการที่ 4 การนำเสนอคำตอบของปัญหา	ครูแนะนำวิธีการนำเสนอกับนักเรียนที่อยู่ต่างกลุ่มกันว่าในการนำเสนอ ควรนำเสนอตั้งแต่วิธีการแก้ปัญหา รายละเอียดการแก้ปัญหา คำตอบที่ได้ และความสมเหตุสมผลของคำตอบ เพื่อให้นักเรียนเรียบเรียงหัวข้อในการนำเสนอได้ดีขึ้น และครูควรขัดเกลาภาษาพูดให้กับนักเรียนด้วย	นำเสนอตามหัวข้อที่ครูได้แนะนำ โดยเรียงจากวิธีการแก้ปัญหา รายละเอียดการแก้ปัญหา คำตอบที่ได้ และความสมเหตุสมผลของคำตอบ และใช้ภาษาที่เหมาะสมกับการสื่อสารในชั้นเรียน
กระบวนการที่ 5 การแสดงความเห็นในการบูรณาการและการประเมินผล	ครูคอยกระตุ้นและชี้แนะให้ผู้เรียนแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในระหว่างที่นำเสนอ และซักถามผู้เรียนว่าแนวคิดของเรากับของเพื่อนเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร	นักเรียนแลกเปลี่ยนเรียนรู้กับเพื่อนกลุ่มอื่น ๆ ว่าวิธีของเพื่อนแตกต่างกันอย่างไร

2. ผลการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน

ผู้วิจัยวิเคราะห์การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์จากเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ ใบกิจกรรม แบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ และการสัมภาษณ์ โดยระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานในแต่ละวงจรปฏิบัติการ นักเรียนจะได้เรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาและทำใบกิจกรรมเป็นรายกลุ่ม และนำผลมาวิเคราะห์เชิงปริมาณเป็นร้อยละ ตามเกณฑ์ที่แสดงในตารางที่ 3 (Lestari, Kesumawati and Ningsih, 2020)

ตารางที่ 3 แนวทางการให้คะแนนการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

คะแนน	การเขียนข้อความ (Verbal;A)	การแสดงแทนภาพ (Visual;B)	การใช้สัญลักษณ์ (Symbolic;C)
4	เขียนอธิบายได้ชัดเจน มีเหตุผลรองรับและเป็นในทางคณิตศาสตร์	อธิบายแผนภาพ/รูปภาพได้สมบูรณ์ ถูกต้อง	เขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แล้วคำนวณหรือแก้ปัญหาได้ถูกต้องสมบูรณ์
3	เขียนอธิบายได้ชัดเจน เป็นในทางคณิตศาสตร์ แต่ยังไม่เป็นเหตุเป็นผล หรือมีความคลาดเคลื่อนทางภาษา	อธิบายแผนภาพ/รูปภาพ ได้สมบูรณ์ แต่ยังมีข้อผิดพลาดเล็กน้อย	เขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง และเลือกวิธีแก้ปัญหาได้ แต่ใช้สัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง
2	เขียนอธิบายในทางคณิตศาสตร์ได้เข้าใจ แต่ถูกต้องและสมบูรณ์เพียงบางส่วน	อธิบายแผนภาพ/รูปภาพ แต่ไม่สมบูรณ์	เขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แต่แก้ปัญหาไม่ถูกต้อง

ตารางที่ 3 แนวทางการให้คะแนนการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (ต่อ)

คะแนน	การเขียนข้อความ (Verbal;A)	การแสดงแทนภาพ (Visual;B)	การใช้สัญลักษณ์ (Symbolic;C)
1	เขียนอธิบายถูกต้องเพียงบางส่วน	มีร่องรอยการพยายามอธิบายแผนภาพ/รูปภาพ แต่ไม่สมบูรณ์	เขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
0	ไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบแต่ขาดความเข้าใจแนวคิด/ข้อมูลที่ให้มาไม่มีความสำคัญ		

หลังจากดำเนินการจัดกิจกรรมครบ 3 วงจรปฏิบัติการ นักเรียนจะได้ทำแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เป็นรายบุคคล และนำผลมาวิเคราะห์เชิงปริมาณเป็นร้อยละ ได้รายละเอียดทั้ง 3 วงจรปฏิบัติการดังตารางที่ 4, 5 และ 6 ตามลำดับ

ตารางที่ 4 จำนวนกลุ่มของนักเรียนตามระดับคะแนนตามเกณฑ์การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 1

กิจกรรมที่	ขั้นตอนในการแก้ปัญหา	ประเด็นที่ประเมิน	จำนวนนักเรียนจำแนกระดับและประเภทการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์				
			4	3	2	1	0
กิจกรรมที่ 1 “จองที่นั่ง”	ทำความเข้าใจปัญหา	ข้อความ (A)	2 (22.22)	-	1 (11.11)	6 (66.67)	-
	หาทางแก้ปัญหา	ข้อความ (A)	4 (44.44)	-	2 (22.22)	3 (33.33)	-
		รูปภาพ (B)	-	-	-	-	9 (100)
		สัญลักษณ์ (C)	1 (11.11)	-	-	-	8 (88.89)
	สรุปและประเมินผล	ข้อความ (A)	2 (22.22)	1 (11.11)	1 (11.11)	5 (55.56)	-
กิจกรรมที่ 2 “อยู่ที่ไหนดี”	ทำความเข้าใจปัญหา	ข้อความ (A)	1 (11.11)	1 (11.11)	4 (44.44)	3 (33.33)	-
	หาทางแก้ปัญหา	ข้อความ (A)	1 (11.11)	1 (11.11)	2 (22.22)	5 (55.56)	-
		รูปภาพ (B)	-	-	-	-	9 (100)
		สัญลักษณ์ (C)	-	-	-	-	9 (100)

ตารางที่ 5 จำนวนกลุ่มของนักเรียนตามระดับคะแนนตามเกณฑ์การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 2

กิจกรรมที่	ขั้นตอนในการแก้ปัญหา	ประเด็นที่ประเมิน	จำนวนนักเรียนจำแนกระดับและประเภทการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์				
			4	**3**	**2**	**1**	**0**
กิจกรรมที่ 3 “บริษัทขนส่งพัสดุ”	ทำความเข้าใจปัญหา	ข้อความ (A)	1 (11.11)	5 (55.56)	2 (22.22)	1 (11.11)	-
	หาทางแก้ปัญหา	ข้อความ (A)	1 (11.11)	1 (11.11)	4 (44.44)	1 (11.11)	2 (22.22)
		รูปภาพ (B)	-	1 (11.11)	1 (11.11)	1 (11.11)	6 (66.67)
		สัญลักษณ์ (C)	-	-	2 (22.22)	3 (33.33)	4 (44.44)
	สรุปและประเมินผล	ข้อความ (A)	-	-	3 (33.33)	4 (44.44)	2 (22.22)
กิจกรรมที่ 4 “เก็บมะม่วงสองไร่”	ทำความเข้าใจปัญหา	ข้อความ (A)			4 (44.44)	5 (55.56)	-
		ข้อความ (A)			3 (33.33)	5 (55.56)	1 (11.11)
	หาทางแก้ปัญหา	รูปภาพ (B)	-	-	-	-	9 (100)
		สัญลักษณ์ (C)	-	-	-	1 (11.11)	8 (88.89)
	สรุปและประเมินผล	ข้อความ (A)	-	-	3 (33.33)	3 (33.33)	3 (33.33)

ตารางที่ 6 จำนวนกลุ่มของนักเรียนตามระดับคะแนนตามเกณฑ์การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรมของวงจรปฏิบัติการที่ 3

กิจกรรมที่	ขั้นตอนในการแก้ปัญหา	ประเด็นที่ประเมิน	จำนวนนักเรียนจำแนกระดับและประเภทการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์				
			4	**3**	**2**	**1**	**0**
กิจกรรมที่ 5 “ตรงนั้นหนาวเท่ากันไหม”	ทำความเข้าใจปัญหา	ข้อความ (A)	-	1 (11.11)	2 (22.22)	3 (33.33)	3 (33.33)
	หาทางแก้ปัญหา	ข้อความ (A)	-	-	2 (22.22)	6 (66.67)	1 (11.11)
		รูปภาพ (B)	-	-	-	-	9 (100)

ตารางที่ 6 จำนวนกลุ่มของนักเรียนตามระดับคะแนนตามเกณฑ์การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรมของวงจปฏิบัติการที่ 3 (ต่อ)

กิจกรรมที่	ขั้นตอนในการแก้ปัญหา	ประเด็นที่ประเมิน	จำนวนนักเรียนจำแนกระดับและประเภทการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์				
			4	3	2	1	0
กิจกรรมที่ 5 “ตรงนั้นหนาวเท่ากันไหม”		สัญลักษณ์ (C)	-	-	1 (11.11)	2 (22.22)	6 (66.67)
	สรุปและประเมินผล	ข้อความ (A)	-	-	-	7 (77.78)	2 (22.22)
กิจกรรมที่ 6 “ขีปนาวุธเชิงเส้น”	ทำความเข้าใจปัญหา	ข้อความ (A)	-	1 (11.11)	4 (44.44)	2 (22.22)	2 (22.22)
	หาทางแก้ปัญหา	ข้อความ (A)	-	1 (11.11)	2 (22.22)	5 (55.55)	1 (11.11)
		รูปภาพ (B)	-	-	-	-	9 (100)
		สัญลักษณ์ (C)	-	-	-	2 (22.22)	7 (77.78)
	สรุปและประเมินผล	ข้อความ (A)	-	-	1 (11.11)	6 (66.67)	2 (22.22)

หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่ส่งเสริมการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่องกราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้วิจัยได้ดำเนินการวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นรายบุคคล โดยแบ่งออกเป็น 3 ด้าน ได้แก่ 1) การเขียนข้อความ 2) การแสดงแทนด้วยภาพ และ 3) การใช้สัญลักษณ์ ได้ผลดังตารางที่ 7

ตารางที่ 7 จำนวนนักเรียนจำแนกตามระดับการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เป็นร้อยละ

ข้อที่	ประเภทการแสดงแทน	ระดับคะแนน				
		4	3	2	1	0
1 (คู่อันดับและกราฟ)	การเขียนข้อความ	1 (3.13)	1 (3.13)	3 (9.38)	9 (28.13)	18 (56.25)
	การแสดงแทนภาพ	1 (3.13)	-	2 (6.25)	4 (12.50)	25 (78.13)
	การใช้สัญลักษณ์	1 (3.13)	1 (3.13)	-	1 (3.13)	29 (90.63)
2 (กราฟและการนำไปใช้)	การเขียนข้อความ	1 (3.13)	2 (6.25)	1 (3.13)	9 (28.13)	19 (59.38)
	การแสดงแทนภาพ	1 (3.13)	4 (12.50)	-	3 (9.38)	24 (75.00)

ตารางที่ 7 จำนวนนักเรียนจำแนกตามระดับการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เป็นร้อยละ

ข้อที่	ประเภทการแสดงแทน	ระดับคะแนน				
		4	3	2	1	0
	การใช้สัญลักษณ์	1 (3.13)	1 (3.13)	2 (6.25)	-	28 (87.50)
3 (ความสัมพันธ์เชิงเส้น)	การเขียนข้อความ	-	1 (3.13)	1 (3.13)	9 (28.13)	21 (65.63)
	การแสดงแทนภาพ	1 (3.13)	3 (9.38)	-	2 (6.25)	26 (81.25)
	การใช้สัญลักษณ์	1 (3.13)	-	1 (3.13)	1 (3.13)	29 (90.63)

จากตารางดังกล่าว พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีระดับคะแนนในการแสดงแทนอยู่ที่ระดับ 0 คือไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบแต่ขาดความเข้าใจแนวคิด/ข้อมูลที่ให้มาไม่มีความสำคัญ โดยที่ข้อที่ 1 นักเรียนส่วนใหญ่มีการเขียนข้อความให้อยู่ในระดับที่เขียนถูกต้องเพียงบางส่วน มีส่วนน้อยที่เขียนในทางคณิตศาสตร์ได้อย่างชัดเจน และมีเหตุผลรองรับในทางคณิตศาสตร์ ในด้านการแสดงแทนภาพ มีส่วนน้อยที่สามารถวาดรูปเพื่อแสดงออกมาโดยได้ทั้งคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ ไปจนถึงไม่แสดงรูปภาพใด ๆ เลย และในด้านการใช้สัญลักษณ์ นักเรียนใช้สัญลักษณ์ที่ได้มาไม่ถูกต้อง มีส่วนน้อยที่ใช้สัญลักษณ์ได้ถูกต้องแล้วนำไปแก้ปัญหาจนได้คำตอบที่สมบูรณ์

ในข้อที่ 2 มีนักเรียนส่วนน้อยที่สามารถเขียนอธิบายข้อความได้ชัดเจน มีการวาดรูปและแผนภาพได้สมบูรณ์/ถูกต้องไปจนถึงมีร่องรอยการวาดรูป และไม่มีรูปภาพเพื่ออธิบายแนวคิดของตนเอง ในด้านการใช้สัญลักษณ์ มีนักเรียนส่วนน้อยที่นำการแสดงสัญลักษณ์มาใช้เพื่อมองเห็นได้ชัดเจนมากขึ้น

ในข้อที่ 3 นักเรียนส่วนใหญ่เขียนข้อความอธิบายถูกต้องได้เพียงบางส่วน มีส่วนน้อยที่ใช้อธิบายทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แต่มีความคลาดเคลื่อนทางภาษาหรือไม่มีความเชื่อมโยงกันในประโยค มีการแสดงแทนภาพเป็นส่วนน้อย และสามารถอธิบายได้ถูกต้อง มีการใช้สัญลักษณ์ที่แก้ปัญหาได้ถูกต้อง

เมื่อพิจารณาแล้วส่วนใหญ่นักเรียนมีการแสดงแทนทางความคิดเป็นข้อความอยู่ในระดับที่อธิบายได้ถูกต้องเพียงบางส่วน มีส่วนน้อยที่สามารถเขียนข้อความได้ สามารถเขียนรูปภาพและอธิบายรูปภาพได้เป็นส่วนน้อย และเขียนสัญลักษณ์และอธิบายได้เป็นส่วนน้อย

จากผลการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานทั้ง 3 แผนการจัดการเรียนรู้ เก็บรวบรวมข้อมูลจากใบกิจกรรมและแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ แสดงให้เห็นว่าผลจากแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย นักเรียนไม่แสดงการวาดรูปเพื่อแก้ปัญหาและอธิบายคำตอบ มีส่วนน้อยที่สามารถใช้ ข้อความ สัญลักษณ์ในการอธิบายคำตอบได้ แต่ยังไม่ถูกต้อง

อภิปรายผลการวิจัย

ตอนที่ 1 แนวทางการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่ส่งเสริมการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

การจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานเพื่อส่งเสริมการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟ และความสัมพันธ์เชิงเส้น เป็นการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาที่เกิดขึ้นจริง หรือสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง เพื่อฝึกกระบวนการคิด

วิเคราะห์ และศึกษาค้นคว้าจนค้นพบคำตอบด้วยตนเอง แล้วนำความรู้มาร่วมกันอภิปรายเพื่อให้เห็นถึงทางเลือกและวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา ทำให้ผู้เรียนเรียนรู้ผ่านกระบวนการคิดและการแก้ปัญหา โดยแต่ละขั้นตอนมีประเด็นในเรื่องของปัญหาและอุปสรรคในกระบวนการจัดการเรียนรู้ดังต่อไปนี้

กระบวนการที่ 1 การระบุถึงปัญหาที่พบ ครูมอบหมายปัญหาที่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่จะสอน มีความน่าสนใจ มีแนวคิดที่หลากหลายและมีความท้าทาย คำถามที่ใช้ควรเป็นปัญหาปลายเปิด สอดคล้องกับ Allen, Duch and Groh (รุสดา จะปะเกีย, 2558) ว่าลักษณะของปัญหาที่ดีจะต้องเป็นปัญหาปลายเปิดที่ท้าทายให้ทำ และแสดงเหตุผลอันสมควรในการวินิจฉัยและการสันนิษฐาน และสอดคล้องกับงานวิจัยของรุสดา จะปะเกีย (2558) ว่าเป็นปัญหาที่เกิดจากประสบการณ์ของผู้เรียนที่พบบ่อย หรือเป็นปัญหาที่อยู่ในความสนใจ เป็นสิ่งที่อยากรู้แต่ไม่รู้ โดยแนวทางในการหาแสวงหาคำตอบสามารถทำได้หลายทาง ครอบคลุมการเรียนรู้ที่กว้างขวาง

กระบวนการที่ 2 การวิเคราะห์ปัญหาและเรียนรู้ประเด็นปัญหา ครูกระตุ้นให้นักเรียนเรียนรู้และวิเคราะห์ว่าปัญหาที่พบในสถานการณ์นี้สามารถนำความรู้ที่ใช้มาช่วยแก้ปัญหาได้อย่างไร นักเรียนวิเคราะห์ปัญหา พร้อมทั้งระบุว่าจากปัญหาที่ให้มานั้น เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่ได้เรียนมาอย่างไร และจะแก้ปัญหาได้อย่างไร โดยใช้การแสดงแทนใดบ้าง สอดคล้องกับงานวิจัยของรุสดา จะปะเกีย (2558) ว่าผู้สอนเป็นผู้กระตุ้นให้นักเรียนอยากเรียนรู้จุดประกายความคิดและกระตุ้นให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน รวมทั้งจัดบรรยากาศการเรียนรู้ให้เหมาะสม และคอยอำนวยความสะดวกให้ผู้เรียนดำเนินงานไปได้อย่างราบรื่น และคอยให้คำปรึกษาเมื่อผู้เรียนพบกับปัญหาที่ไม่สามารถแก้ไขด้วยตนเอง สอดคล้องกับงานวิจัยของศุภฤกษ์ บัวเสนาะ (2563) ว่าผู้สอนมีบทบาทในการจัดการเรียนรู้ โดยสามารถกระตุ้นความสนใจของผู้เรียนได้ดี สามารถให้คำแนะนำช่วยเหลือผู้เรียนได้และคอยชี้นำอยู่ห่าง ๆ และให้อิสระแก่นักเรียนในการศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม และแนวทางการส่งเสริมการแสดงแทนที่ได้สรุปจากการทบทวนวรรณกรรมมาว่าควรให้นักเรียนรู้จักการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่าง ๆ ว่ามีอะไรบ้าง แล้วจึงสนับสนุนให้นักเรียนแก้ปัญหาด้วยวิธีดังกล่าว โดยรวมเข้าเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการหาคำตอบด้วย

กระบวนการที่ 3 การค้นพบและรายงานผล ครูแนะนำและกระตุ้นให้นักเรียนหาคำตอบจากวิธีที่ได้เรียนรู้ว่าเหมาะสมหรือไม่ นักเรียนแก้ปัญหาโดยใช้วิธีที่เรียนรู้มา ผ่านกระบวนการคิดวิเคราะห์จนได้คำตอบ นำมาตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาดังกล่าวว่าถูกต้องเหมาะสมหรือไม่ อย่างไร หากได้คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เหมาะสม ควรแก้ปัญหาด้วยวิธีอื่น ๆ สอดคล้องกับขั้นตอนที่ 3 และ 4 ของสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้ (2550) ว่าผู้เรียนกำหนดสิ่งที่ต้องเรียน ดำเนินการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองด้วยวิธีการที่หลากหลาย แล้วจึงนำความรู้ที่ได้มาค้นคว้าและแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกัน อภิปรายผลและสังเคราะห์ความรู้ที่ได้มาว่ามีความเหมาะสมหรือไม่ เพียงใด เช่นเดียวกันกับวัลลี สัตยาศัย (รุสดา จะปะเกีย, 2558) ว่าสมาชิกในกลุ่มจะช่วยกันวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้มาเพื่อพิสูจน์สมมติฐานที่วางไว้สรุปผลเรียนรู้ที่ได้มาจากการศึกษาปัญหา รวมทั้งแนวทางในการนำความรู้ หลักการไปใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ทั่วไป และรังสรรค์ ทองสุกนอก (2547) ว่านักเรียนจะสังเคราห์ข้อมูลที่ได้ศึกษาค้นคว้ามาว่าเพียงพอกับการตรวจสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้หรือไม่ แล้วนำข้อมูลที่ได้ไปตรวจสอบสมมติฐานและการแก้ปัญหา ถ้าไม่เพียงพอกลุ่มจะต้องกำหนดสิ่งที่ต้องเรียนรู้เพิ่มเติม แผนการเรียนรู้ และแหล่งข้อมูลแล้วดำเนินการศึกษาอีกครั้งเพื่อให้ได้ข้อมูลที่สมบูรณ์ก่อน

กระบวนการที่ 4 การนำเสนอคำตอบของปัญหา ครูแนะนำวิธีการนำเสนอกับนักเรียนที่อยู่ต่างกลุ่มกันว่าในการนำเสนอ ควรนำเสนอตั้งแต่วิธีการแก้ปัญหา รายละเอียดการแก้ปัญหา คำตอบที่ได้ และความสมเหตุสมผลของคำตอบ เพื่อให้นักเรียนเรียบเรียงหัวข้อในการนำเสนอได้ดีขึ้น และครูควรขัดเกลาภาษาพูดให้กับนักเรียนด้วย นักเรียนนำเสนอตามหัวข้อที่ครูได้แนะนำ โดยเรียงจาก วิธีการแก้ปัญหา รายละเอียดการแก้ปัญหา คำตอบที่ได้ และความสมเหตุสมผลของคำตอบ และใช้ภาษาที่เหมาะสมกับการสื่อสารในชั้นเรียน สอดคล้องกับขั้นการสะท้อนผลการเรียนรู้ของรังสรรค์ ทองสุกนอก (2547) ว่านักเรียนจะเสนอแผนงานดำเนินการกลุ่มทั้งหมดตั้งแต่กระบวนการแรกจนถึงกระบวนการสุดท้าย สอดคล้องกับงานวิจัยของวิระสิทธิ์ มาตอำพร (2563) ว่าขั้นตอนการสรุปและประเมินค่าของคำตอบ ผู้เรียนแต่ละกลุ่มสรุปผลงานของกลุ่มตัวเอง แล้วประเมินผลงานว่าข้อมูลที่ศึกษาค้นคว้ามีความเหมาะสมหรือไม่เพียงใด แล้วพยายามตรวจสอบแนวคิดภายในกลุ่มของตนเองอย่างอิสระ ทุกกลุ่มช่วยกันสรุปองค์ความรู้ในภาพรวมของปัญหาอีกครั้ง

กระบวนการที่ 5 การแสดงความเห็นในการบูรณาการและการประเมินผล ครูคอยกระตุ้นและชี้แนะให้ผู้เรียนแลกเปลี่ยนเรียนรู้ในระหว่างที่นำเสนอ และซักถามผู้เรียนว่าแนวคิดของเรากับของเพื่อนเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร นักเรียนแลกเปลี่ยนเรียนรู้กับเพื่อนกลุ่มอื่น ๆ ว่าวิธีของเพื่อนแตกต่างกันอย่างไร สอดคล้องกับแนวคิดของสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้ (2550) ในขั้นที่ 6 นำเสนอและประเมินผลงาน ที่ผู้เรียนจะต้องนำข้อมูลที่ได้มาจัดระบบองค์ความรู้และนำเสนอเป็นผลงานในรูปแบบที่หลากหลาย ผู้เรียนทุกกลุ่มรวมทั้งผู้ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาร่วมกันประเมินผลงาน และสอดคล้องกับแนวคิดจากงานวิจัยของรังสรรค์ ทองสุกนอก (2547) ที่กล่าวว่าในขั้นตอนเดียวกันกับกระบวนการที่ 4 จะเปิดโอกาสให้นักเรียนในชั้นเรียนได้ประเมินผลงานของกลุ่มอื่น ๆ ด้วยนอกเหนือไปจากนั้น ครูและนักเรียนจะช่วยกันสรุปข้อมูลหรือความรู้ที่แต่ละกลุ่มได้ศึกษาค้นคว้าอีกครั้ง

ตอนที่ 2 ผลการนำเสนอการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน เรื่อง กราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น

จากการวิเคราะห์ข้อมูลระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานจากใบกิจกรรมและแบบวัดการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ นักเรียนส่วนใหญ่เลือกแสดงแทนทางคณิตศาสตร์โดยใช้ข้อความอยู่ในระดับที่ 1 นั่นคือเขียนอธิบายได้ถูกต้องเพียงบางส่วน มีส่วนน้อยที่สามารถเขียนข้อความได้มากกว่าระดับที่ 1 และมีการพัฒนาการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้นเรื่อย ๆ จนมีนักเรียนที่สามารถแสดงแทนทางข้อความ รูปภาพ และสัญลักษณ์อยู่ในระดับเริ่มต้น โดยวิเคราะห์เป็นประเด็นในแต่ละประเด็นได้ดังต่อไปนี้

1. การเขียนแสดงแทนข้อความ นักเรียนสามารถเขียนข้อความที่จะสื่อสารออกมาได้แต่ไม่ถูกหลักภาษา เนื่องมาจากประสบการณ์ในการใช้ภาษายังมีค่อนข้างน้อย และความรู้เดิมที่นักเรียนได้เรียนรู้ สอดคล้องกับ Acharya (2017) ที่ได้ระบุปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์คือความรู้เดิมของนักเรียน จะเป็นสิ่งที่ตัดสินว่านักเรียนจะสามารถพัฒนาความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ต่อไปได้หรือไม่ นักเรียนที่บกพร่องในความรู้เดิมก่อนเรียนรู้ จะทำให้นักเรียนไม่อยากเรียนรู้และไม่ประสบความสำเร็จในเนื้อหาที่ต้องใช้ความรู้เดิมในระดับที่สูงขึ้น นอกจากนี้ยังมีปัจจัยในเรื่องของความกลัวการเรียนรู้คณิตศาสตร์ นักเรียนมักเข้าใจว่าเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ยากทำให้ขาดความมั่นใจในการเรียนรู้ โดยที่ผู้วิจัยได้พบว่าในช่วงการจัดกิจกรรมในช่วงแรก ๆ นักเรียนเกือบทั้งหมดถามผู้วิจัยว่าในการเขียนคำตอบ ควรจะเขียนคำตอบอย่างไร จากปัจจัยดังกล่าว ทำให้แนวคิดเกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนไม่ชัดเจน นอกเหนือจากนี้ ผู้วิจัยยังต้องมีการเกลาภาษาที่นักเรียนจะต้องเขียนตอบลงไปในใบกิจกรรม เนื่องจากนักเรียนยังมีประสบการณ์ในการใช้คำเพื่อเรียบเรียงภาษาในการเขียนตอบในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาไม่มากพอ

2. การเขียนแสดงแทนด้วยรูปภาพ เกือบทุกกิจกรรมจะไม่พบการแสดงแทนด้วยรูปภาพ เนื่องจากเหตุผลเดียวกันกับการเขียนแสดงแทนข้อความดังที่กล่าวมาแล้ว สอดคล้องกับปัญหาที่ Syahputra and Mapaung (2016) วิจัยแล้วพบว่านักเรียนในระดับเกรด 8 มีระดับการแสดงแทนที่ยังคงอยู่ในระดับต่ำ โดยเฉพาะการใช้สิ่งเปรียบเทียบ แม้ว่าจะเคยเรียนเรื่องนี้มาตั้งแต่ในระดับเกรด 5 และระดับเกรด 6 แต่นักเรียนก็ลืมความรู้เหล่านี้ไปหมดแล้ว นอกจากนี้การวาดรูปเพื่อแก้ปัญหาอาจไม่เหมาะสมกับโจทย์ปัญหาบางประเภท โดยผู้วิจัยพบจากใบกิจกรรมว่านักเรียนไม่กล้าที่จะวาดรูปเพื่ออธิบายแนวคิดของตนเอง เมื่อไม่มีรูป นักเรียนก็ไม่สามารถอธิบายแนวคิดที่ได้จากการแก้ปัญหาออกมา เนื่องจากนักเรียนไม่คุ้นเคยกับการแก้ปัญหาโดยการวาดรูป สอดคล้องกับแนวทาง ของอรชร ภูบุญเติม (2550) ว่าครูจะต้องให้นักเรียนรู้จักตัวแทนทางคณิตศาสตร์ว่ามีอะไรบ้าง ก่อนที่จะสอนให้นักเรียนนำตัวแทนความคิดเหล่านั้นไปใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ โดยส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดเพื่อหาวิธีในการนำเสนอตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา รวบรวมข้อมูล สื่อสารความเข้าใจกับผู้อื่น และสามารถเลือก ประยุกต์ใช้ด้วยความเข้าใจ และสอดคล้องกับแนวคิดของ Lesh (ณัฐกานต์ อารีรัตนเวช, 2565) ว่ารูปภาพจะช่วยสะท้อนแนวคิดความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ การแสดงแทนด้วยรูปภาพจะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนได้อธิบายแนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

3. การเขียนแสดงแทนด้วยสัญลักษณ์ มีนักเรียนที่ใช้สัญลักษณ์ในการอธิบายวิธีการทำได้ถูกต้องและสมบูรณ์ โดยมีการพัฒนาเพิ่มมากขึ้นในช่วงท้าย ๆ ของโดยนักเรียนใช้สัญลักษณ์เพื่อแทนความหมายทางคณิตศาสตร์บางอย่างเพื่ออธิบาย

แนวคิดของตนเอง สอดคล้องกับแนวคิดของ Lesh (ณัฐกานต์ อารีรัตนเวช, 2565) ว่าสัญลักษณ์ทางการเขียนจะทำให้แนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ชัดเจนมากยิ่งขึ้น สำหรับนักเรียนที่ไม่พบการใช้สัญลักษณ์ก็ด้วยปัจจัยเดียวกันกับการเขียนแสดงแทนด้วยข้อความดังกล่าวมาแล้ว

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำข้อมูลวิจัยไปใช้

1. ครูควรออกแบบและเลือกปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับนักเรียน หากนักเรียนมีความสามารถทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับกลางลงไป งานทางคณิตศาสตร์ควรใช้ภาษาให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรม สถานการณ์มีความเชื่อมโยงกับเหตุการณ์ปัจจุบัน หรือสิ่งของในชีวิตประจำวันที่ต้องนำไปใช้จริง ๆ และกิจกรรมควรมีความน่าดึงดูดใจ เช่น กิจกรรมที่ 6 ขีปนาวุธเชิงเส้นเป็นกิจกรรมที่นำมาประยุกต์ใช้กับการวาดกราฟจากความสัมพันธ์เชิงเส้นที่กำหนดให้โดยจับฉลาก และเชื่อมโยงกับการวาดเรือที่สมมติจากช่องสองช่อง

2. ครูควรฝึกฝนให้นักเรียนทำความเข้าใจปัญหาด้วยตนเอง แสดงแนวคิดในการดำเนินการแก้ปัญหาโดยเขียนออกมาเป็นข้อความ ใช้สัญลักษณ์ หรือวาดรูปเพื่อแก้ปัญหา และใช้ความรู้เดิมในการแก้ปัญหาเพื่อให้นักเรียนสามารถค้นพบ เรียนรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลายและเชื่อมโยงไปสู่การบูรณาการในการแก้ปัญหา และควรเปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถใช้ดินสอเพื่อวาดรูปได้ด้วย

ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานเป็นวิธีการจัดการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนเชื่อมโยงชีวิตจริงกับโลกของคณิตศาสตร์ได้ และทำให้เห็นความสำคัญของคณิตศาสตร์ ในการวิจัยครั้งต่อไปควรนำรูปแบบกิจกรรมการเรียนรู้นี้ไปใช้เนื่องจากในทุกกระบวนการของการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานนั้นสามารถส่งเสริมการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ได้ทุกด้าน และควรศึกษาวิธีการแก้ปัญหาที่เป็นไปได้ทั้งหมดนอกเหนือจากการแสดงแทนทั้งข้อความ รูปภาพ และสัญลักษณ์ เช่น การใช้สิ่งของ การใช้กราฟ การใช้ตาราง เพื่อแนะนำให้นักเรียนรู้จักวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

เอกสารอ้างอิง

ณัฐกานต์ อารีรัตนเวช. **การวิจัยปฏิบัติการเพื่อพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แนวปฏิบัติการสอน 5 ขั้นที่ส่งเสริมการนำเสนอตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.** การค้นคว้าอิสระการศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2565.

ดวงมณี ยะอัมพันธุ์. “โมเดลการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อออกแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์,” **วารสารวิชาการธรรมทรรศน์.** 22, 3 (กรกฎาคม-กันยายน 2565): 423-436.

พรรณทิภา ทองนวล. **ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาโดยเน้นการใช้ตัวแทนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.** วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2554.

พระพันธวัฒน์ ธมฺมวฑฺโน และวิทยา ทองดี. “การจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน,” **วารสาร มจร อุบลปริทรรศน์.** 7, 1 (มกราคม-เมษายน 2565): 967-976.

พิชญ์สินี ชมภูคำ. **การจัดกระบวนการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.** เชียงใหม่: สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาเชียงใหม่ เขต 1, 2547.

มาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้, สำนัก. **การจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน.** กรุงเทพฯ: ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด, 2550.

รังสรรค์ ทองสุกนอก. **ชุดการเรียนการสอนโดยใช้ปัญหาเป็นฐานในการเรียนรู้ (Problem-Based Learning) เรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.** วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2547.

รุสดา จะปะเกีย. **ผลของการจัดการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐาน ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนชีววิทยาและความพึงพอใจในการจัดการเรียนรู้ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6.** วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี, 2558.

วิระสิทธิ์ มาตอำพร. **การพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน (PBL) ร่วมกับแนวคิดการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) เรื่องการประยุกต์ร้อยละ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6.** วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยมหาสารคาม, 2563.

ศุภฤกษ์ บัวเสนาะ. **ผลการจัดการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐาน เพื่อพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.** การศึกษาค้นคว้าอิสระการศึกษามหาบัณฑิต ศึกษามหาวิทยาลัยนเรศวร, 2563.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. **ผลการประเมิน PISA 2018 การอ่าน คณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท), 2564.

สิริพร ทิพย์คง. "เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์," **วารสารคณิตศาสตร์ปริมา.** 64, 699 (กันยายน-ธันวาคม 2562): 6-24.

สุรางค์ โค้วตระกูล. **จิตวิทยาการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 12. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2559.

สุวิมล ว่องวาณิช. **การวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน.** พิมพ์ครั้งที่ 17. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557.

อัมพร ม้าคนอง. **คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม.** กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2558.

———. **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2559.

อรชร ภูบุญเติม. **การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation).** วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2550.

Acharya, B.R. "Factors Affecting Difficulties in Learning Mathematics by Mathematics Learners," **International Journal of Elementary Education.** 6, 2 (April 2017): 8-15.

Lestari, I., N. Kesumawati and Y. L. Ningsih. "Mathematical representation of grade 7 students in set theory topic through problem-based learning," **Infinity.** 9, 1 (February 2020): 103-110.

Mainali, B. "Representation in Teaching and Learning Mathematics," **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST).** 9, 1 (January 2021): 1-21.

O' Brien, T. C., C. Wallach and C. Mash-Duncan. "Problem-based learning in mathematics," The Mathematics **Enthusiast.** 8, 1 (2011): 147-159.

Syahputra, E. and R. I. T. Marpaung. "Students' mathematics representation and the alternative solutions," In: Rajagukguk J., editors. **AISTEEL 2016.** Proceedings of the 1st Annual International Seminar on Transformative Education and Educational Leadership: 19 November 2016; Medan, Indonesia. Medan, Indonesia, 2016. pp. 260-266.

Utami, P. R., I. Junaedi and I. Hidayah. "Mathematical representation ability of students' grade X in mathematics learning on problem based learning," **Unnes Journal of Mathematics Education.** 7, 3 (November 2018): 164-171.