

สอนอย่างไรให้นักเรียนเกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

How to Teach the Students to Arise Mathematical Skills and Processes?

นิวัฒน์ สาระขันธุ์

มหาวิทยาลัยราชภัฏร้อยเอ็ด

Niwat sarakhan

Roi-et Rajabhat University, Thailand.

E-mail : niwatsarakhan@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้ผู้เขียนสังเคราะห์ขึ้นจากการศึกษาวิจัยและการศึกษาค้นคว้า ในเรื่องการสอนทักษะกระบวนการคิดให้กับนักเรียนเพื่อให้เท่าทันกับการเป็นนักเรียนในยุคศตวรรษที่ 21 ซึ่งเป็นทักษะที่จำเป็นในการดำรงชีวิตได้อย่างดีและเอาตัวรอดในโลกยุคอนาคต บทความนี้จึงเหมาะสำหรับครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา นักวิชาการ และผู้บริหารการศึกษาเพื่อเป็นแนวทางในการนำไปใช้ในการสอนเด็ก การวางแผน วางนโยบายในการพัฒนาเด็กนักเรียนให้เป็นคนที่มีทักษะกระบวนการคิดและสามารถนำไปปรับประยุกต์ใช้ในการดำรงชีวิตในสภาวะการณ์ของโลกที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไม่หยุดยั้งในปัจจุบันได้เป็นอย่างดี

คำสำคัญ: ทักษะการคิด; ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

Abstracts

This article was synthesized from research and study by the author in teaching students thought-process skills to stay competitive as students in the 21st century, a skill necessary to well live and survive in the future world. It was therefore suitable for primary school math teachers, scholars and education administrators as a guideline for use in teaching children, planning, setting up policies to develop students to become people with cognitive skills and ability. It can be applied to life in the changing world conditions constantly changing as well.

Keywords: Thinking Skill; Mathematical Process Skills

ความหมายและความสำคัญของทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematical skills and Mathematical process) เป็นความสามารถหรือความชำนาญในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นองค์ประกอบสำคัญของศักยภาพทางคณิตศาสตร์ (Mathematic proficiency) ของ

* วันรับบทความ: 4 มีนาคม 2564; วันแก้ไขบทความ 1 เมษายน 2564; วันตอบรับบทความ: 3 เมษายน 2564

Received: March 4, 2021; Revised: April 1, 2021; Accepted: April 3, 2021

ผู้เรียนทุกคน เนื่องจากเป็นสิ่งที่ทำให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มีความหมาย การจัดการศึกษาคณิตศาสตร์จึงมุ่งให้ผู้เรียนมีทั้งความรู้และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ควบคู่กันไป ลองเปรียบเทียบการใช้ความรู้คณิตศาสตร์กับปัญหาที่มีบริบทแตกต่างกันต่อไปนี้

1. จงหาผลลัพธ์ของ $575 - (174 + 90)$

2. เด็กกลุ่มหนึ่งอ่านหนังสือรวม 174 เล่ม เด็กอีกกลุ่มหนึ่งอ่านรวม 90 เล่ม พวกเขาจะต้องอ่านหนังสืออีกกี่เล่ม จึงจะทำให้ยอดรวมเป็น 575 เล่ม ตามที่โรงเรียนต้องการ

เป็นที่ยอมรับของนักการศึกษาคณิตศาสตร์ทั้งต่างประเทศและในประเทศไทยว่า ผู้เรียนเกือบร้อยละ 100 ที่เรียนการดำเนินการเรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มแล้ว สามารถหาคำตอบสำหรับข้อ 1 ได้ถูกต้อง เนื่องจากคุ้นเคยกับการทำงานลักษณะนี้ในห้องเรียน สำหรับข้อ 2 นั้น มีผู้เรียนในกลุ่มเดียวกันจำนวนมากที่ไม่เข้าใจปัญหาและไม่สามารถหาคำตอบที่ถูกต้องได้ เนื่องจากไม่คุ้นเคยหรือขาดทักษะการเชื่อมโยงความรู้เรื่องการดำเนินการในห้องเรียนกับปัญหาในชีวิตจริง จากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่าความสามารถในการนำความรู้ไปใช้ซึ่งเป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์นั้น เป็นเครื่องมือของผู้เรียนในการทำให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มีความหมายและมีคุณค่ามากกว่าเป็นเพียงวิชาที่ ประกอบด้วยสัญลักษณ์และขั้นตอนการแก้ปัญหาในห้องเรียน ความรู้และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์จึงเป็นของคู่กัน และเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการแก้ปัญหาในชีวิตจริง มนุษย์ใช้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการดำรงชีวิต ไม่ว่าจะเป็นการแก้ปัญหาชีวิตหรือการใช้เหตุผลในสังคม แต่อาจไม่รู้ตัว เพราะคิดว่าการใช้คณิตศาสตร์ต้องมีตัวเลขและการคำนวณเข้ามาเกี่ยวข้อง ด้วยความสำคัญที่มนุษย์จำเป็นต้องมีและใช้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน จึงมีการส่งเสริมให้มีการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในขณะสอนเนื้อหาคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องในทุกระดับของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนจะได้ทั้งความรู้และทักษะและกระบวนการควบคู่กันไป ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เน้นในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานทั้งในต่างประเทศและประเทศไทยคล้ายคลึงกัน โดยประกอบด้วย 5 ทักษะหลัก หรือที่มักเรียกกันว่า ทักษะ 1P 1R 3C ตามตัวอักษร ภาษาอังกฤษตัวแรกของแต่ละทักษะ ดังนี้

การแก้ปัญหา (Problem solving)

การให้เหตุผล (Reasoning)

การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ (Communications and presentations)

การเชื่อมโยง (Connections)

การคิดริเริ่มสร้างสรรค์ (Creativity)

หลายทักษะและกระบวนการที่เน้นในการศึกษาระดับโรงเรียนหรือการศึกษาขั้นพื้นฐาน เป็นองค์ประกอบของทักษะชีวิตและทักษะพื้นฐานในการทำงาน การพัฒนา ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในผู้เรียน จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถนำสิ่งเหล่านี้ไปใช้ในการ ทำงานและการดำรงชีวิตในสังคม ทำ

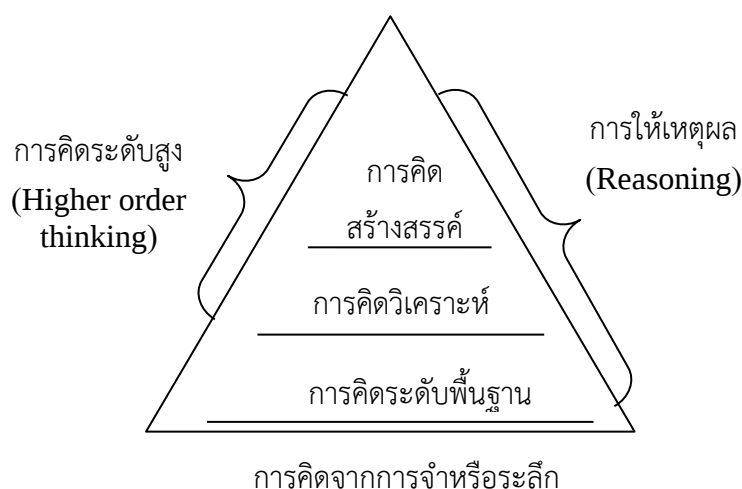
ให้สามารถอยู่ได้อย่างมีคุณภาพ และทำให้มีความพร้อมสำหรับ การเป็นสิ่งสำคัญในการแก้ปัญหาและพัฒนาสังคม อย่างไรก็ตาม ทักษะที่เป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์คือ ทักษะการคิด หากพิจารณาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น จะเห็นว่าแต่ละทักษะเกี่ยวข้องโดยตรงกับการคิด หากผู้เรียนไม่คิด คิดไม่เป็น หรือคิดไม่ได้ก็จะไม่สามารถพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้ ดังนั้น การฝึกการคิดให้กับผู้เรียนจึงเป็นสิ่งสำคัญที่ควรทำควบคู่ไปกับการพัฒนาทักษะและกระบวนการ ทางคณิตศาสตร์

ทักษะการคิดกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

การคิดเป็นความสามารถของผู้เรียนในการหาข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่มีอยู่ (Kulk & Rudnick, 1993) ในการทำงานอย่างหนึ่ง ผู้เรียนอาจต้องใช้การคิดในหลายลักษณะประกอบกัน เช่น การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หนึ่งข้อ อาจต้องใช้การคิดวิเคราะห์โจทย์ การคิดอย่างเป็นเหตุผลถึง กระบวนการแก้ปัญหา การคิดสังเคราะห์ เพื่อนำความรู้ย่อยๆ ที่มีมาประกอบกันเพื่อแก้ปัญหา เป็นต้น การพัฒนาทักษะการคิดที่หลากหลายให้กับผู้เรียน จะช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะอื่นได้ อย่างไรก็ตาม การคิดเป็นความสามารถทางสมองที่ต้องมีการฝึกอย่างยาวนาน ผู้ที่คิดเป็นและคิดเก่งมักเป็นผู้ที่ชอบคิด และมีการฝึกการคิดอย่างต่อเนื่องในเวลานาน การสอนการคิด (Teaching of thinking) เป็นการสอน ทักษะการคิดโดยตรง โดยอาจเกี่ยวข้องกับกระบวนการทางสมองที่นำมาใช้ในการคิด และการสอนเพื่อฝึกให้คิด (Teaching for thinking) เป็นการสอนเนื้อหาวิชาปกติ แต่ใช้กระบวนการจัดการเรียนรู้เพื่อเน้นความสามารถในการคิดของผู้เรียน การสอนเพื่อพัฒนาการคิดเป็นสิ่งที่ต้องทำอย่างต่อเนื่องในชั้นเรียน ไม่ว่าจะเป็นการคิดลักษณะใด ผู้สอนควรฝึกให้ผู้เรียนได้เริ่มต้นคิด ได้พยายามคิด ไม่ว่าจะคิดได้หรือคิดไม่ได้ จะคิดถูกหรือคิดผิด เพื่อที่ผู้เรียนจะได้คุ้นเคยและรักการคิด

ความสามารถในการคิดเป็นองค์ประกอบสำคัญในการช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้และสร้างวิธีใช้ความรู้ของตนเอง เช่น คนขายของข้างถนนสามารถพัฒนาวิธีและเทคนิคการคิดเลขในใจที่ไม่มีการสอนในโรงเรียน โดยใช้ประสบการณ์ของตนเองจากการคิดเงิน ทองเงิน ที่ทำได้อย่างถูกต้องและ รวดเร็ว (Schlierman & Carraher, 2002 : 173) หรือคนทำครัวที่ไม่ได้เรียนหนังสือ แต่สามารถคิดและจัดเตรียมเครื่องปรุงอาหารแต่ละชนิดได้พอดีกับจำนวนคนที่มารับประทาน ทั้งที่ไม่มีความรู้และไม่ได้ผ่านการทดสอบเรื่องอัตราส่วนและสัดส่วน (Carraher, & Schliemann, 1985 : 127) สิ่งเหล่านี้ ล้วนเป็นผลจากการคิดทั้งสิ้น การพัฒนาให้ผู้เรียนมีทักษะการคิดที่ดีจึงเป็นสิ่งจำเป็น เนื่องจากผู้เรียน จะได้ใช้การคิดเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ที่เกิดขึ้นอย่างรวดเร็วในโลกปัจจุบัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเรียนรู้ที่ชาญฉลาดสามารถคัดกรองความรู้และข้อมูลข่าวสารที่เป็นประโยชน์ต่อตนเองและส่วนรวม

การคิดของมนุษย์เป็นไปตามลำดับความซับซ้อนของกระบวนการทางปัญญา เริ่มต้นจากระดับต่ำสุด คือการคิดเกี่ยวกับสิ่งที่จำได้หรือรู้มาหรือเป็นสิ่งที่ระลึกได้ ซึ่งมักจะเป็นข้อมูล หรือข้อเท็จจริง การคิดในระดับ ต่อจากนั้น เป็นการคิดระดับพื้นฐานที่ต้องใช้ความเข้าใจประกอบการคิด แล้วจึงสามารถ คิดต่อไปถึงระดับการ วิเคราะห์และสร้างสรรค์ การคิดระดับพื้นฐาน การคิดวิเคราะห์ และการคิด สร้างสรรค์เป็นการคิดให้เหตุผล (Reasoning) ในขณะที่การคิดวิเคราะห์และการคิดสร้างสรรค์เป็น การคิดระดับสูง (Higher order thinking) (Krulik & Rudnick, 1993 : 129) ลำดับการคิดดังกล่าวแสดง ได้ตามแผนภาพ 1 อย่างไรก็ตาม การคิดในแต่ละระดับอาจคาบเกี่ยวกัน จึงไม่แยกจากกันโดยเด็ดขาด การพัฒนาการคิดในลักษณะนี้ ทำให้ มนุษย์สามารถคิดสิ่งที่ซับซ้อนมากขึ้นได้ และสามารถจำแนกได้ว่า สิ่งใดเป็นความคิดเห็นหรือความรู้สึก สิ่งใด เป็นข้อเท็จจริง และควรใช้สิ่งใดประกอบการคิดและ ตัดสินใจ



แผนภาพ 1 ลำดับการคิดของมนุษย์ตามแนวคิดของ Krulik & Rudnick (1993 : 98)

จากลำดับการคิดข้างต้น ทำให้ได้แนวคิดว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้ผู้เรียนได้คิดนั้น ผู้สอนต้อง มั่นใจว่าผู้เรียนมีพื้นฐานการคิดเพียงพอที่จะสามารถคิดเพื่อทำงานที่กำหนดให้ได้ เช่น ถ้างานที่กำหนดให้ต้องใช้ การคิดวิเคราะห์ ผู้สอนต้องมั่นใจว่าผู้เรียนมีความรู้ความจำ และความเข้าใจในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับงานนั้น เพียงพอที่จะเป็นพื้นฐานในการคิดวิเคราะห์ได้ และเมื่อต้องการให้ผู้เรียนคิดในลักษณะใด ผู้สอนต้องวิเคราะห์ ลักษณะสำคัญของการคิดนั้น เพื่อที่จะออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับ ลักษณะของการคิดนั้น ใน ที่นี้จะได้กล่าวถึงการคิดในลักษณะต่าง ๆ รวมทั้งการจัดกิจกรรมเพื่อพัฒนาการ คิดลักษณะนั้น ๆ ดังต่อไปนี้

1. การคิดเชิงวิเคราะห์ (Analytic thinking) เป็นการคิดแยกแยะ ตีความ และขยายความจากสิ่งที่มี อยู่ คิดหาความสัมพันธ์ คิดเพื่อเขียนพิสูจน์และวิพากษ์วิจารณ์ การพิสูจน์ เป็นการแปลความหมายหรือตีความ

ข้อมูลจากปัญหาคณิตศาสตร์ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ต้องเน้นการให้ข้อมูลหรือสถานการณ์ที่เป็นภาพรวม เพื่อให้ผู้เรียนจำแนก แยกแยะ หรือค้นหาคำประกอบย่อย

2. การคิดเชิงสังเคราะห์ (Synthetic thinking) เป็นการคิดที่มีการผสมผสานส่วนย่อยเข้าด้วยกัน เพื่อนำไปสู่สิ่งใหม่ ๆ เช่น การสังเคราะห์ความรู้ย่อย ๆ ทางคณิตศาสตร์ หรือสังเคราะห์ ความรู้คณิตศาสตร์ ร่วมกับข้อมูลหรือความรู้อื่น ทำให้ได้ข้อมูลใหม่ที่จะนำไปใช้ประโยชน์ได้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้จึงต้องเน้นการให้ข้อมูลย่อยๆ ที่เกี่ยวข้องกันด้วยความสัมพันธ์บางอย่าง เพื่อให้ผู้เรียนได้คิดหาความสัมพันธ์และเชื่อมโยงข้อมูลย่อยๆ เหล่านั้นเข้าด้วยกัน จนได้ความรู้หรือแนวคิดใหม่

3. การคิดอย่างมีวิจารณ์ญาณ หรือการคิดวิเคราะห์วิจารณ์ (Critical thinking) เป็นการคิดที่มีการพิจารณา ไตร่ตรอง โดยใช้ข้อมูล ความรู้ และประสบการณ์ เช่น การคิดทบทวน กระบวนการแก้ปัญหาว่า ถูกต้อง เหมาะสม หรือสมเหตุสมผลหรือไม่ อย่างไร การจัดกิจกรรมการเรียนรู้จึงต้องเน้นการให้สถานการณ์ที่ยังไม่ชัดเจน และให้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องที่ผู้เรียนสามารถจะนำไปใช้ประกอบการพิจารณาไตร่ตรองได้

4. การคิดเชิงตรรกะ (Logical thinking) เป็นการคิดเพื่อสรุปผลจากเหตุหรือสิ่งที่ถูกกำหนดขึ้น โดยข้อสรุปที่ได้ต้องสอดคล้อง สมเหตุสมผล และเป็นจริงตามข้อกำหนด การคิดลักษณะนี้ แบ่งเป็น 2 แบบ ดังนี้

4.1 การคิดแบบนิรนัย (Deductive thinking) เป็นการคิดจากส่วนรวมไปยังส่วนย่อย เช่น การพิจารณาว่าจะใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร และนิยามทางคณิตศาสตร์ที่ระบุไว้กับปัญหา ได้อย่างไร การจัดกิจกรรมการเรียนรู้จึงต้องเน้นการให้ข้อมูลหรือสถานการณ์ เพื่อให้ ซึ่งจะทำให้ได้ข้อสรุปที่เป็นไปตามหลักการทั่วไป

4.2 การคิดแบบอุปนัย (Inductive thinking) เป็นการคิดโดยใช้ข้อเท็จจริงย่อย ๆ ไปสู่กฎ หรือหลักทั่วไปที่เป็นส่วนรวม เช่น การพิจารณาความสัมพันธ์เพื่อหาแบบรูปหรือความสัมพันธ์ทั่วไป การจัดกิจกรรมการเรียนรู้จึงต้องเน้นการให้ข้อเท็จจริงย่อย ตัวอย่าง หรือสถานการณ์ เพื่อให้ผู้เรียน สังเกตลักษณะร่วมหรือแบบรูป แล้วสร้างสมมติฐาน ตรวจสอบ และนำไปสร้างเป็นหลักการทั่วไป

5. การคิดสร้างสรรค์ (Creative thinking) เป็นการสร้างแนวคิดที่แปลกใหม่ หาวิธีการแก้ปัญหา หรือหาคำตอบที่ง่ายกว่า สะดวกกว่า และมีประสิทธิภาพมากกว่า การจัดกิจกรรม การเรียนรู้จึงต้องเอื้อให้ผู้เรียนได้คิดและทำงานอย่างอิสระ โดยอาจให้งานที่สามารถทำได้ หลากหลายวิธี หรือการให้คำถามหรือปัญหาปลายเปิด (Open ended problem) ซึ่งอาจเป็นการเปิดคำตอบคือมีหลากหลายคำตอบ หรือเป็นการเปิดกระบวนการคือทำให้หลากหลายวิธี

6. การคิดเชิงประเมิน (Evaluative thinking) เป็นการคิดหาข้อดีและข้อจำกัด หาทางเลือก พิจารณาข้อได้เปรียบเสียเปรียบ ประเมิน เพื่อตัดสินใจเลือกทางเลือกที่ดีที่สุด เป็นการประเมินกระบวนการแก้ปัญหา วิธีการที่ใช้ และความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้จึงต้องให้สถานการณ์ที่มีข้อดี ข้อเสีย ข้อจำกัด เงื่อนไข และทางเลือกที่หลากหลาย

7. การคิดเชิงระบบ (Systematic thinking) เป็นความสามารถในการคิดเชิงภาพรวมหรือการจัดระบบ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้จึงต้องเน้นการทำงานที่มีหลายๆ ส่วน หรือหลายๆ องค์ประกอบ แต่ละส่วนมีวิธีหรือขั้นตอนการทำงานต่าง ๆ เพื่อให้ผู้เรียนได้คิดวางแผน และจัดระบบการทำงานให้เป็นผลสำเร็จ

นักจิตวิทยาและนักวิจัยทางด้านการคิดมีความเห็นสอดคล้องกันว่า กระบวนการคิดของมนุษย์ มีความซับซ้อน คุณภาพการคิดของมนุษย์ขึ้นอยู่กับหลายองค์ประกอบ ซึ่งล้วนเป็นปัจจัยที่จะทำให้ ผู้เรียนคิดได้หรือคิดไม่ได้ องค์ประกอบที่สำคัญของการคิดมีดังนี้

1. ความรู้เกี่ยวกับสิ่งที่คิด (Domain-specific knowledge) การคิดเกี่ยวกับเรื่องใดก็ตาม ผู้คิด จำเป็นต้องมีความรู้เฉพาะเกี่ยวกับเรื่องนั้นดีพอ จึงจะทำให้คิดได้และทำให้การคิดบรรลุจุดหมาย

2. กระบวนการพื้นฐานของการคิด (Basic process of thinking) กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการคิดมีหลากหลาย เช่น การสังเกต การเปรียบเทียบ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์หรือ ความสอดคล้อง การสร้างข้อความคาดการณ์ ข้อโต้แย้ง การหาข้อสรุป การวิเคราะห์ ความสมเหตุสมผล

3. ความตระหนักรู้ในการคิด (Metacognition) ในกระบวนการคิด ผู้คิดจะมีความตระหนักในการคิดของตน ซึ่งเป็นการกำกับและตรวจสอบกระบวนการคิดของตนเองว่าเหมาะสม ถูกต้องหรือสมเหตุสมผลเพียงใด และควรปรับเปลี่ยนให้ดีขึ้นได้อย่างไร

4. เจตคติต่อการคิด (Attitude toward thinking) เป็นการเห็นคุณค่าและประโยชน์ของการคิด มีความรู้สึกที่ดีต่อการคิด และพร้อมที่จะคิดเมื่อมีโอกาส รวมถึงการเห็นคุณค่าของการรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่นที่จะทำให้คนได้รับความรู้และได้ก็ตาม

การให้ผู้เรียนคิดเกี่ยวกับเรื่องใด ๆ ผู้สอนจึงต้องตระหนักถึงองค์ประกอบที่กล่าวมาทั้งหมดทั้งนี้เพื่อให้แน่ใจว่าผู้เรียนจะสามารถคิดได้ นั่นคือ ผู้สอนต้องมั่นใจว่าผู้เรียนมีความรู้เพียงพอในเรื่องที่กำลังจะคิดนั้น หากไม่แน่ใจ ผู้สอนอาจต้องทบทวนหรือให้ความรู้พื้นฐานที่จะสามารถนำไปใช้ได้ ในขณะเดียวกัน ผู้สอนควร แนะนำให้ผู้เรียนใช้กระบวนการพื้นฐานของการคิดให้เหมาะสม เช่น อาจแนะนำให้ใช้การสังเกต การเปรียบเทียบ เพื่อให้ผู้เรียนมีแนวทางที่จะคิด ผู้สอนควรฝึกให้ผู้เรียนตรวจสอบการทำงานของตนเองอย่างต่อเนื่อง หากมีข้อผิดพลาดในตอนใด จะได้แก้ไขหรือปรับเปลี่ยนได้ทัน ทำให้ไม่ต้องเสียเวลาใน การเริ่มต้นทำงานใหม่นอกจากนี้ผู้สอนควรพยายามสร้างเจตคติที่ดีต่อการคิดให้ผู้เรียน ด้วยการทำให้ ผู้เรียนเห็นคุณค่าและประโยชน์ของการคิด มีความรู้สึกที่ดีหรือรอยการคิด และพร้อมที่จะคิดในสถานการณ์ต่าง ๆ การเตรียมผู้เรียนให้มีองค์ประกอบครบทั้งสี่ประการ จะทำให้ผู้เรียนมีความพร้อมที่จะคิด และประสบความสำเร็จในการคิด

การพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์

การพัฒนาการคิดมิได้เป็นเรื่องที่ยากเกินไป เพราะการคิดและการทำงานของมนุษย์ แม้จะเป็น เรื่องของสติปัญญาที่เกี่ยวข้องโดยตรงกับพันธุกรรม แต่สามารถเปลี่ยนแปลงหรือพัฒนาขึ้นได้จากการ จัดสิ่งแวดล้อมที่เหมาะสม (Williams & Paulhus, 2002 : 192) โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในสิ่งแวดล้อมที่มีผลต่อ สติปัญญา ทั้งนี้ เพราะสติปัญญาประกอบด้วยความสามารถในการวิเคราะห์ สร้างสรรค์ และปฏิบัติการ การ สอนหรือการจัดการเรียนรู้ในปัจจุบันจึงต้องมุ่งพัฒนาระบบการทางปัญญาให้ผู้เรียนมาก กว่าการสอนหรือ ถ่ายทอดเนื้อหาหรือความรู้ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การฝึกทักษะการคิดวิเคราะห์ สร้างสรรค์ และการนำไป ปฏิบัติงาน ซึ่งสามารถทำได้โดยง่ายด้วยการพยายามตั้งข้อสังเกตหรือถามคำถามให้ผู้เรียนคิด แม้การสอน เนื้อหาหรือองค์ความรู้ที่เป็นนามธรรม ก็สามารถฝึกการคิดได้ การพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการ พัฒนาระบบการคิดที่เกี่ยวข้องกับ คณิตศาสตร์ จึงอาจทำได้ง่ายๆ ด้วยการพยายามใช้คำถามให้ผู้เรียนได้คิด เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่าง การถามคำถามต่อไปนี้ในห้องเรียน

“รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ เพราะเหตุใด”

“ทำไมเราจึงไม่สามารถระบุได้ว่าจำนวนอตรรกยะที่มากที่สุดคือจำนวนใด”

“ทำไมรถยนต์ที่วิ่งด้วยความเร็วคงที่จึงไม่มีความเร่ง”

“ทำไม $\frac{a}{0}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ จึงไม่เท่ากับ 0”

“เราจะอธิบายโดยไม่ต้องคำนวณได้อย่างไรว่า $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ”

“ทำไมเราจะวัดความยาวของเส้นตรงไม่ได้ แต่วัดความยาวของส่วนของเส้นตรงได้”

“ทำไมเราไม่ใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ในการหาค่ากลางของข้อมูลเชิงคุณภาพ เช่น เพศ มีของ เสื้อผ้า เบอร์รองเท้า”

“เราจะเขียนจำนวนอตรรกยะซึ่งเป็นทศนิยมไม่รู้จบบนเส้นจำนวนได้หรือไม่ ถ้าได้มีวิธีการเขียน อย่างไร”

“ในการคูณทศนิยมด้วยทศนิยม ทำไมผลลัพธ์ที่ได้จึงมีจำนวนตำแหน่งทศนิยมเท่ากับผลรวมของ ตำแหน่งทศนิยมของตัวตั้งและตัวคูณ”

“ในการนำเสนอข้อมูลด้วยค่าเฉลี่ยเลขคณิต ทำไมต้องนำเสนอส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานร่วมด้วย”

“วงกลมต่างจากวงรีอย่างไร ถ้าบีบด้านตรงข้ามของวงกลมเข้าหากัน วงกลมนั้นจะกลายเป็น วงรีหรือไม่ เพราะเหตุใด”

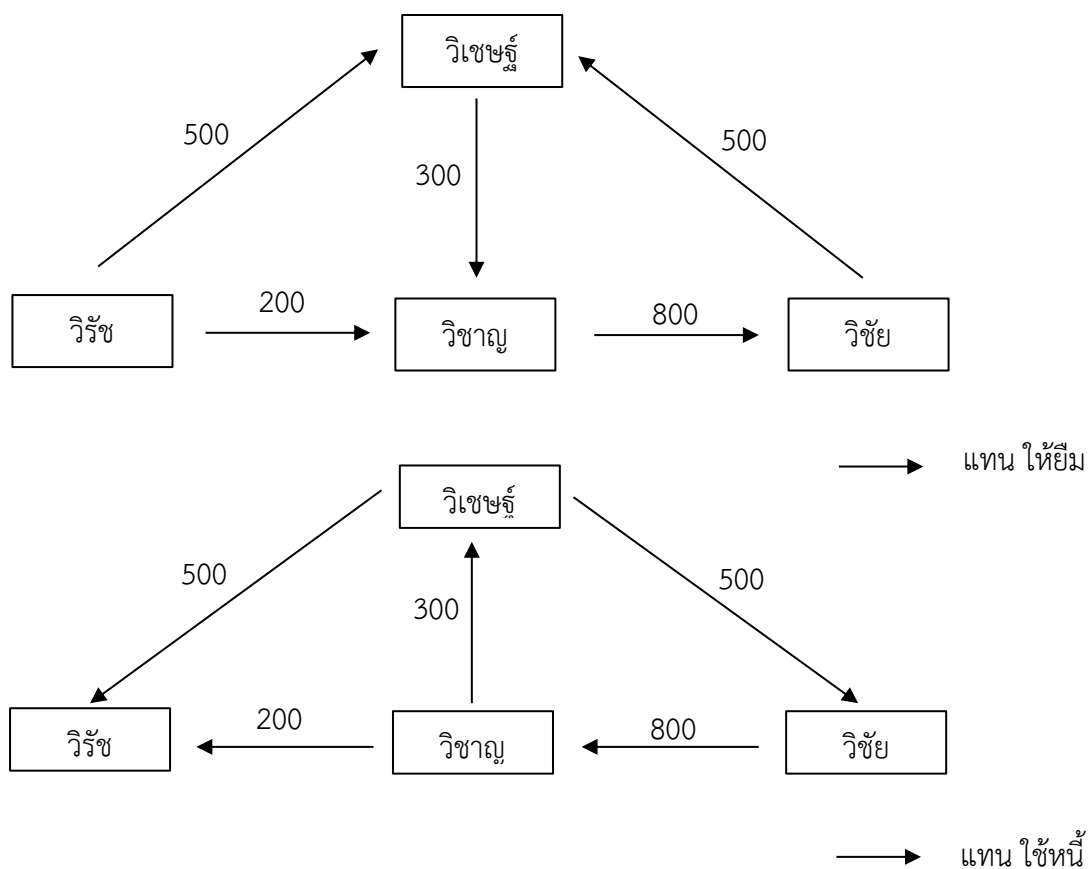
นอกจากการใช้คำถาม การพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ยังอาจทำได้โดยใช้กระบวนการ จัดการ เรียนการสอนในห้องเรียน ซึ่งผู้สอนจะต้องเข้าใจบริบทของชั้นเรียนที่สอน และจะต้องคำนึงถึงกระบวนการ จัดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ และหลักการสอนคณิตศาสตร์ที่จะช่วยให้ผู้เรียนได้พัฒนาความคิดทาง คณิตศาสตร์

Novak & Gowin (1984) ได้เสนอแนวคิดในการพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์โดยใช้ Heuristics ซึ่งเป็นการเชื่อมโยงข้อมูลหรือแนวคิดที่สัมพันธ์กันหรือมีลักษณะเดียวกันไว้ด้วยกัน เพื่อให้เกิดระบบข้อมูลที่เอื้อต่อการคิด การพัฒนาความคิดโดยใช้ Heuristics ถูกนำมาใช้มากในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนทางการคิดดังตัวอย่างต่อไปนี้

ปัญหาการยืมเงิน

วิชาญให้วิชัยยืมเงิน 800 บาท โดยที่วิชาญเองก็ขอยืมเงินจากวิรัชและวิเชษฐ์คนละ 200 บาท และ 300 บาท ตามลำดับ ในขณะที่วิเชษฐ์ก็ยังเป็นหนี้วิรัชและวิชัยอยู่ 500 บาท และ 800 บาท ตามลำดับ เมื่อเงินเดือนออกทั้งสี่คนมีการชำระหนี้กันถ้าทั้งสี่คนมีเงินเดือนเท่ากัน อยากทราบว่า เมื่อชำระหนี้เสร็จสิ้น ใครมีเงินมากที่สุด

การคิดแก้ปัญหานี้สามารถทำได้ด้วยการใช้การบวกและลบ แต่หากใช้ Heuristics เชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่จะคิดได้ง่ายขึ้น ดังแผนภาพการให้ยืมและการใช้หนี้ต่อไปนี้



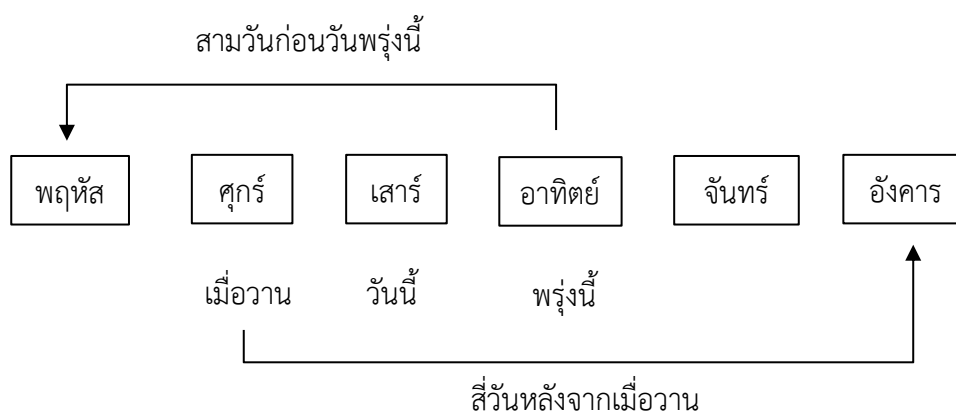
แผนภาพ 2 การใช้ Heuristics การแก้ปัญหการยืมเงิน

จากแผนภาพ ทำให้ตอบคำถามได้ว่าคนที่เหลือเงินน้อยที่สุดคือวิเชษฐ์ เพราะต้องใช้หนี้ 1,000 บาท ในขณะที่ได้รับเงินคืน 300 บาท จึงต้องจ่าย 700 บาท นอกจากนี้ยังสรุปข้อมูลอื่นจากแผนภาพได้อีก เช่น วิชัยได้รับเงินคืนและต้องใช้หนี้เป็นจำนวนเงินเท่ากัน วิชาญได้รับเงินคืน 800 บาท แต่ต้องใช้หนี้ 500 บาท จึงได้เงินเพิ่ม 300 บาท และวิรัชได้รับเงินคืน 700 บาท โดยไม่ต้องใช้หนี้ใคร จึงเป็นคนที่มียังเงินมากที่สุด

ปัญหาการระบุวัน

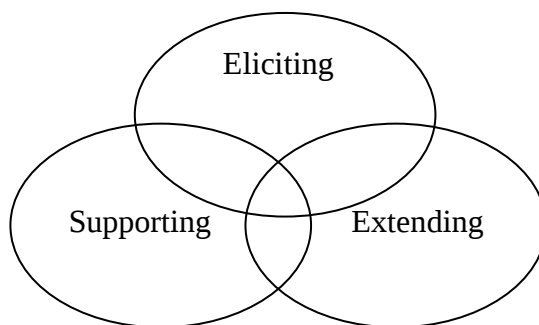
ถ้าสามวันก่อนวันพรุ่งนี้เป็นวันพฤหัสบดีแล้ว สี่วันหลังจากเมื่อวานเป็นวันอะไร

ปัญหานี้เป็นปัญหาที่ไม่ทราบตัวตั้งต้น เป็นตัวอย่างของปัญหาสั้นๆ ที่มีเงื่อนไขไม่มากนัก แต่มีความซับซ้อนทางความคิด หลายคนอาจแก้ปัญหาไม่ได้เพราะคิดว่าข้อมูลที่กำหนด ให้ไม่เพียงพอที่จะหาคำตอบ และหลายคนคิดไม่ได้เพราะไม่ทราบจุดเริ่มต้นของการคิดว่าควรเริ่มจาก วันนี้ วันพรุ่งนี้ วันวาน หรือวันอื่นใด การใช้ Heuristics จะช่วยให้ข้อมูลถูกจัดอยู่ในสภาพที่เอื้อต่อการคิด ซึ่งจะได้คำตอบเป็นวันอังคาร ดังนี้



แผนภาพ 3 การใช้ Hueristics แก้ปัญหาการระบุวัน

Fraivillig (2001 : 454-459) ได้เสนอแนวคิดในการพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียน โดยใช้กรอบแนวคิด ACT (Advancing Children's Thinking) กรอบแนวคิดนี้พัฒนามาจากการวิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลที่เป็นรายงานการสังเกตการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน (Everyday Mathematics (EM) Curriculum) ซึ่งพบว่าปัจจัยที่มีผลต่อประสิทธิภาพการสอนของผู้สอนในหลักสูตรนี้มี 3 ประการ ดังแผนภาพต่อไปนี้



แผนภาพ 4 กรอบแนวคิด ACT (Advancing Children's Thinking)

1. ความสามารถของผู้สอนในการทำให้ผู้เรียนแสดงวิธีคิด/วิธีแก้ปัญหา (Eliciting) เป็นความสามารถในการดำเนินการต่อไปนี้

- ตั้งวิธีแก้ปัญหาที่หลากหลายสำหรับปัญหาหนึ่งๆ
- ปล่อยให้เวลาผู้เรียนคิดและรอฟังคำอธิบาย
- กระตุ้นให้ผู้เรียนอธิบายและขยายความ
- ใช้คำอธิบายของผู้เรียนในการสอนเนื้อหาตามบทเรียน
- แสดงการยอมรับข้อผิดพลาดของผู้เรียนและให้โอกาสผู้เรียนแสดงความพยายาม
- ส่งเสริมการแก้ปัญหาร่วมกัน
- พิจารณาและตัดสินใจว่าผู้เรียนคนใดควรมีโอกาสฝึกปฏิบัติงาน

2. ความสามารถของผู้สอนในการส่งเสริมความเข้าใจเชิงมีโนทัศน์ของผู้เรียน (Supporting) เป็นความสามารถในการดำเนินการต่อไปนี้

- ชี้ให้ผู้เรียนคิดถึงสถานการณ์ปัญหาที่มีโครงสร้างหรือมีโนทัศน์คล้ายคลึงกับปัญหาที่กำลังแก้
- ให้ความรู้หรือข้อมูลพื้นฐานที่จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน
- ให้ความรู้ผ่านการอธิบายตัวอย่างที่ผู้เรียนใช้ในการแก้ปัญหา
- เขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แสดงวิธีการแก้ปัญหบนกระดาน
- ทำให้ผู้เรียนรู้สึกสะดวกใจที่จะถามคำถามหรือขอความช่วยเหลือ

3. ความสามารถของผู้สอนในการขยายความคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียน (Extending) เป็นความสามารถในการดำเนินการต่อไปนี้

- คาดหวังให้ผู้เรียนได้พัฒนาอย่างมีคุณภาพและมีมาตรฐานระดับสูง
- กระตุ้นให้ผู้เรียนสรุปและอ้างอิงสิ่งที่ค้นพบไปใช้
- ให้ผู้เรียนสะท้อนความคิดเกี่ยวกับวิธีแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน
- ส่งเสริมให้ผู้เรียนแต่ละคนลองใช้วิธีแก้ปัญหาที่เป็นทางเลือกใหม่ๆ

- สนับสนุนการใช้วิธีแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพมากกว่า
- ปลุกฝังให้ผู้เรียนรักความท้าทายและความพยายามในการเรียนรู้

ความสามารถทั้งสามประการของผู้สอน คือ ความสามารถในการทำให้ผู้เรียนแสดงวิธีคิด วิธีแก้ปัญหา (Eliciting) ความสามารถในการส่งเสริมความเข้าใจเชิงมนทัศน์ของผู้เรียน (Supporting) และความสามารถในการขยายความคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียน (Extending) เป็นสิ่งที่สอดคล้อง กับแนวการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในปัจจุบันของประเทศไทย ที่เน้นให้ผู้สอนกระตุ้นให้ผู้เรียนคิดและ แสดงวิธีคิดหรือวิธีแก้ปัญหาที่หลากหลาย (Eliciting) ส่งเสริมหรือช่วยเหลือให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และ เข้าใจในสิ่งที่เรียน (Supporting) และขยายความคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียน (Extending) ซึ่งธรรมชาติของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นั้น ปัจจัยทั้งสามมักเกิดร่วมกัน เช่น การให้ผู้เรียนบางคน อธิบายวิธีคิด อาจเป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนบางคนขยายความคิดของตนเอง หรือการให้ผู้เรียนอธิบายวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย จะช่วยให้ผู้เรียนวิเคราะห์และสะท้อนความคิดเกี่ยวกับวิธีแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตาม บุคลิกและพฤติกรรมของผู้สอนเป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้ผู้เรียนร่วมมือ หากผู้สอนมีความสัมพันธ์ที่ดีกับผู้เรียน ยอมรับฟังความคิดเห็น และเปลี่ยนข้อผิดพลาดของผู้เรียนเป็น โอกาสในการเรียนรู้สิ่งใหม่ ผู้เรียนจะรู้สึกสะดวกใจที่จะเรียนรู้ ถามคำถาม ขอความช่วยเหลือ อภิปราย และวิพากษ์วิจารณ์ในห้องเรียน

การพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานของการพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ที่ผ่านมาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยังไม่ได้เน้นเรื่องของการคิดมากพอ ผู้เรียนจึงไม่คุ้นเคยกับการคิดและไม่ชอบคิด ผู้สอนอาจต้องใช้ความพยายามเป็นอย่างมากในการทำให้ผู้เรียนได้คิดอยู่เสมอ ด้วยการใช้กิจกรรมและคำถามที่หลากหลาย เพื่อจะทำให้ผู้เรียนได้ใช้การคิดที่หลากหลายร่วมกัน อันจะทำให้ผู้เรียนคุ้นเคยกับการคิด รักการคิด และมีทักษะการคิดที่ดี ดังตัวอย่างการฝึกการคิดทาง คณิตศาสตร์โดยใช้สถานการณ์ในชีวิตประจำวันต่อไปนี้

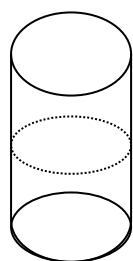
ตัวอย่างที่ 1 : ครึ่งแก้วหรือเปล่า

หากเราทราบว่าแก้วทรงกระบอกที่ใช้อยู่มีปริมาตร 200 มิลลิลิตร และต้องการใช้แก้วนี้ตวง น้ำ ปริมาตร 100 มิลลิลิตร เพื่อนำไปผสมเครื่องปรุงหมักผงสำเร็จรูป จึงประมาณปริมาตรน้ำเป็น ครึ่งหนึ่งของแก้ว แต่เนื่องจากตามสูตรต้องการใช้น้ำปริมาตร 100 มิลลิลิตร พอดี หรือใกล้เคียงที่สุด ทำอย่างนี้จะทราบว่ามีน้ำที่ตรงนั้นครึ่งแก้วพอดี

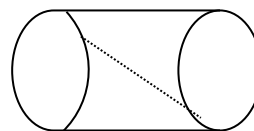
สถานการณ์นี้ หากไม่กำหนดเงื่อนไขใด ๆ ให้เลย ผู้เรียนอาจตอบได้โดยง่าย เช่น ใช้กระดาษวัด ความสูงจากฐานแก้วถึงระดับน้ำในแก้ว แล้วทำเครื่องหมายไว้บนกระดาษ จากนั้นนำกระดาษนั้นไป เทียบกับความสูงของแก้วส่วนที่ไม่มีน้ำ ถ้าเท่ากันพอดี แสดงว่าน้ำในแก้วเป็นครึ่งหนึ่งพอดี แต่ถ้าความสูงของแก้วส่วนที่มีน้ำมากกว่าส่วนที่ไม่มีน้ำ แสดงว่าน้ำมากกว่าครึ่งแก้ว หรือในทำนองกลับกัน ถ้าความสูงของแก้วส่วนที่มีน้ำน้อยกว่าส่วนที่ไม่มีน้ำ แสดงว่าน้ำน้อยกว่าครึ่งแก้ว นอกจากการใช้กระดาษแล้ว ผู้เรียนอาจเลือกใช้เชือกหรือวัสดุ

อื่นแทนกระดาษ และอาจมีผู้เรียนบางคนเสนอวิธีอื่นที่แตกต่างออกไป เช่น แสดงขีดระดับน้ำที่แก้วไว้ แล้วหาวัสดุที่เป็นระนาบและน้ำไม่สามารถไหลผ่านได้มาวางปิดปากแก้ว แล้วคว่ำแก้วลง ถ้าระดับน้ำอยู่ที่ขีดเดียวกับที่ทำเครื่องหมายไว้ก่อนคว่ำแก้ว แสดงว่าน้ำที่มีอยู่นั้นมี ปริมาตรครึ่งแก้วพอดี แต่ถ้าระดับน้ำอยู่ต่ำกว่าขีด แสดงว่าน้ำมีปริมาตรน้อยกว่าครึ่งแก้ว และถ้าระดับ น้ำอยู่สูงกว่าขีด แสดงว่าน้ำมีปริมาตรมากกว่าครึ่งแก้ว

อย่างไรก็ตาม หากมีการกำหนดเงื่อนไขให้กับสถานการณ์โดยไม่ให้มีการใช้อุปกรณ์ใด ๆ ช่วยเลยจะทำให้ระดับการคิดซับซ้อนขึ้น ผู้สอนอาจต้องแนะวิธีคิดเพื่อให้ผู้เรียนเชื่อมโยงความรู้เรื่องปริมาตร ของทรงกระบอก ไปสู่การหาปริมาตรครึ่งหนึ่งของทรงกระบอก ซึ่งอาจทำได้ง่าย ๆ โดยการวางทรงกระบอกตามแนวตั้งและตามแนวนอนดังนี้

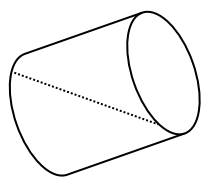


แนวตั้ง

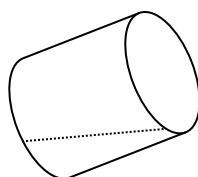


แนวนอน

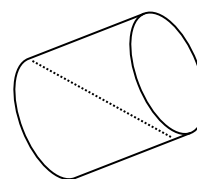
จากแนวคิดนี้ ถ้าเอียงแก้วแล้วระดับน้ำในแก้วเป็นเส้นทแยงมุมของแก้วพอดี แสดงว่าน้ำที่มีอยู่เป็น ครึ่งแก้วพอดี ถ้าระดับน้ำต่ำกว่าเส้นทแยงมุมแสดงว่าน้ำน้อยกว่าครึ่งแก้ว และถ้าระดับน้ำสูงกว่าเส้นทแยงมุม แสดงว่าน้ำมากกว่าครึ่งแก้ว ดังรูป 1 รูป 2 และ รูป 3 ตามลำดับ



รูป 1



รูป 2



รูป 3

กิจกรรมนี้เป็นตัวอย่างของการฝึกการคิดทางคณิตศาสตร์ง่าย ๆ โดยใช้สถานการณ์ในชีวิตประจำวัน เนื่องจากเป็นสิ่งที่ผู้เรียนจะระลึกถึงหรือคิดได้โดยไม่จำเป็นต้องใช้สื่อรูปธรรมประกอบ

ตัวอย่างที่ 2 : เลือกแบบไหนดี

ปู้ทำงานช่วงปิดเทอมที่บริษัทแห่งหนึ่ง ด้วยความขยันและตั้งใจทำงาน เจ้าของบริษัทจึงขึ้น ค่าจ้างให้ปู้ 10% โดยต้องมีการหัก 10% ของค่าจ้างเข้ากองทุนเงินสะสม ถ้าเจ้าของบริษัทให้ปู้เลือก การขึ้นค่าจ้างหนึ่งในสองทางเลือกต่อไปนี้

ทางเลือกแรก : ขึ้นค่าจ้างในเดือนแรก 10% และหัก 10% ของค่าจ้างในเดือนถัดไป

ทางเลือกที่สอง : หักค่าจ้างในเดือนแรก 10% และขึ้น 10% ของค่าจ้างในเดือนถัดไป

ปู้ควรเลือกทางเลือกใด เพราะเหตุใด

สถานการณ์ในลักษณะนี้ ต้องการการคิดไตร่ตรองอย่างรอบคอบเพื่อที่จะตัดสินใจเลือกทางเลือกที่ดีที่สุด ผู้เรียนบางคนอาจบอกว่าข้อมูลที่กำหนดให้ไม่เพียงพอที่จะตัดสินใจ เนื่องจากไม่ทราบเงินเดือนเดิมของปู้ บางคนอาจสมมติเงินเดือนเป็นจำนวนจำนวนหนึ่งแล้วคิดตามเงื่อนไขในแต่ละทางเลือก ไม่ว่าจะคิดอย่างไรก็ตาม ทางเลือกทั้งสองจะทำให้ปู้ได้รับเงินเท่ากันตั้งแต่เดือนที่สองเป็นต้นไป ถ้าปัจจุบันปู้มีเงินเดือน x บาท ปู้จะได้รับเงินในเดือนแรกและเดือนถัดๆ ไป ตามเงื่อนไขของแต่ละทางเลือกดังนี้

ทางเลือกแรก : $1.10x, 0.99x, 0.99x, 0.99x, \dots$

ทางเลือกที่สอง : $0.90x, 0.99x, 0.99x, 0.99x, \dots$

ความแตกต่างอยู่ที่เงินเดือนเดือนแรกเท่านั้น ทางเลือกแรกที่เลือกขึ้น 10% ก่อน จะทำให้เงินเดือนเป็น $1.10x$ บาท ในเดือนแรก และหัก 10% ของ $1.10x$ บาท ทำให้เหลือ $0.99x$ บาท ในเดือนที่สองและเดือนถัดๆ ไป ส่วนทางเลือกที่สองที่เลือกหัก 10% ก่อน จะทำให้เงินเดือนเหลือ $0.90x$ บาท ในเดือนแรก และขึ้น 10% ของ $0.90x$ บาท ทำให้ได้ $0.99x$ บาท ในเดือนที่สองและเดือนถัดๆ ไป ถ้าผู้เรียนพิจารณาผิวเผินอาจตอบว่าเลือกทางเลือกใดก็ได้เหมือนกัน เพราะในที่สุดจะได้เงินเท่ากัน แต่ถ้าไตร่ตรองให้รอบคอบจะเห็นว่าทางเลือกแรกจะทำให้ปู้ได้รับเงินมากกว่า สถานการณ์ลักษณะนี้จึงใช้ฝึกการคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียนได้เป็นอย่างดี

ตัวอย่างที่ 3 : ตามหาโทรศัพท์มือถือ

ถ้าท่านหาโทรศัพท์มือถือไม่เจอ โดยอาจจะวางไว้ที่ใดที่หนึ่งในบ้าน แต่จำไม่ได้ เนื่องจากท่านทำกิจกรรมหลายอย่างในวันนั้น ท่านจะอย่างไร จึงจะทราบว่าโทรศัพท์ของท่านอยู่ที่ไหน ทั้งนี้ท่านแน่ใจว่าต้องอยู่ในบ้าน เพราะท่านได้ใช้โทรศัพท์คุยกับเพื่อนก่อนที่จะหาไม่เจอ

คำตอบของคำถามนี้อาจมีหลากหลายตามวิธีแก้ปัญหาของผู้เรียนแต่ละคน เช่น ค้นหาจนกว่าจะพบถามคนในบ้านว่ามีใครเห็นโทรศัพท์ของเราบ้าง ให้พี่หรือน้องช่วยหา ขอยืมของคนอื่นใช้ไปก่อน ค่อยๆ คิดย้อนกลับว่าเราไปทำอะไรที่ไหนบ้าง แต่วิธีที่ง่ายที่สุดคือ ใช้โทรศัพท์ธรรมดาหรือขอยืม โทรศัพท์มือถือของคนในบ้านโทรเข้าเครื่องของตนเอง เพียงเท่านี้ก็จะทราบว่าโทรศัพท์ของเราอยู่ที่ไหน แต่ถ้าเงื่อนไขเปลี่ยนไป เช่น เราไม่แน่ใจว่าลืมไว้ในนอกบ้านหรือเปล่า หรือไม่ได้เปิดเครื่องโทรศัพท์ไว้ จะอย่างไร เงื่อนไขเหล่านี้ท้าทายให้

ผู้เรียนได้คิดอย่างสร้างสรรค์ การคิดลักษณะนี้เป็นการคิด เชิงตรรกะ (Logical thinking) ซึ่งเป็นการคิดทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 4 : เลือกแบบไหนคุ้มกว่า

ถ้าให้เลือกวิธีซื้อสินค้าอย่างหนึ่งโดยได้รับส่วนลด 40% แต่วิธีแรกคือลดราคา 40% ครั้งเดียว จากราคาสินค้าที่ติดป้ายไว้ กับวิธีที่สองคือลดครั้งแรก 20% จากราคาสินค้าที่ติดป้ายไว้ แต่ขายไม่หมด จึงนำมาลดราคา 20% อีกครั้ง ทั้งนี้ สินค้าทุกชิ้นเป็นสินค้าชนิดเดียวกัน และมีคุณภาพเหมือนกัน

ผู้เรียนที่มีประสบการณ์ในการคิดดีกว่าอาจเลือกใช้การคิดเทียบราคาสินค้าที่ติดป้ายครั้งแรก 100 บาท ซึ่งเมื่อลดราคา 40% ผู้ซื้อจะซื้อได้ในราคา 60 บาท แต่ถ้าเลือกซื้อวิธีที่สอง สินค้าราคา 100 บาท ลดครั้งแรกเหลือ 80 บาท ลดครั้งที่สองอีก 20% ของ 80 บาท คือ 16 บาท ผู้ซื้อจะซื้อสินค้า นี้ได้ในราคา 64 บาท ซึ่งแพงกว่าการซื้อโดยวิธีแรก ผู้เรียนที่มีความสามารถในการคิดนี้อาจขยายความได้ว่า ผลดังกล่าวเป็นจริงเสมอไม่ว่าราคาสินค้าจะเปลี่ยนไปเช่นใด และอาจเขียนความสัมพันธ์แทน ราคาซื้อ P และราคาสินค้า Q ได้ดังนี้

$$\text{วิธีที่ 1 : } P = 0.6Q$$

$$\text{วิธีที่ 2 : } P = 0.8(0.8Q)$$

การแก้ปัญหาในสถานการณ์นี้ เป็นการพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์โดยใช้ความรู้เชิง มโนทัศน์และความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้เรียนสามารถคิดได้โดยไม่ยาก

ตัวอย่างที่ 5 : ทำไมจึงพูดเช่นนั้น

ท่านเคยคิดหรือไม่ว่า เพราะเหตุใดเราจึงไม่พูดว่า แบ่งกวยเตี๋ยวคนละ 0.5 ชาม แต่มักพูดว่าแบ่งกวยเตี๋ยวคนละครึ่งชาม ซึ่งครึ่งชามในที่นี้หมายถึงหนึ่งในสองส่วน หรือ $\frac{1}{2}$ ในทำนองกลับกัน เราไม่พูดว่าแบ่งเงินคนละครึ่งบาท หรือหนึ่งในสองส่วน หรือ $\frac{1}{2}$ บาท แต่มักพูดว่าแบ่งเป็นคนละ 50 สตางค์ หรือ 0.50 บาท

สถานการณ์นี้ทำให้เห็นการใช้งานของมโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วนและทศนิยมในชีวิตประจำวัน การสื่อสารให้ผู้อื่นเข้าใจต้องใช้ความคิดทางคณิตศาสตร์ประกอบอย่างสมเหตุสมผลว่า เพราะการแบ่งกวยเตี๋ยวครึ่งชามเป็นการแบ่งของออกเป็นสองส่วนที่เท่ากันหรือใกล้เคียงกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งของที่เป็นรูปธรรมที่สามารถเห็นหรือประมาณได้ว่าแต่ละส่วนเท่ากัน ส่วนการแบ่งเงิน 1 บาท เป็นการแบ่งที่ไม่มีการใช้เงินหรือเหรียญ 1 บาทจริง แต่มีการสื่อความหมายเชิงนามธรรมที่เป็นที่เข้าใจตรงกันว่า เงิน 1 บาท ประกอบด้วยเงิน 1 สตางค์ 100 ส่วน การแบ่งเงินหนึ่งบาทเป็นสองส่วน จึงหมายถึง การแบ่งเงินกันคนละ 50 สตางค์ ซึ่งคิดเป็น $\frac{50}{100}$ หรือ 0.50 บาท การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในลักษณะนี้ แสดงถึงการสัมพันธ์ความคิดระหว่างสิ่งที่เป็นรูปธรรมและนามธรรมกับภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 6 : เงินของป๋ม ป้อม และป๊อด

ป๋ม ป้อม และป๊อด เป็นเพื่อนสนิทกัน วันหนึ่ง ทั้งสามคนนัดกันไปเที่ยวสวนสนุก แต่แต่ละคนมีเงินติดตัวไปต่างกัน ที่สวนสนุก ป๋มซื้ออุปกรณ์กีฬาทางน้ำ 300 บาท ป้อมเล่นเกมได้ 200 บาท ส่วนป๊อดซื้อของเล่น 400 บาท เมื่อกลับออกมาจากสวนสนุก ปรากฏว่า ทั้งสามคนเหลือเงินเท่ากัน จะหาว่าเดิมใครมีเงินมากที่สุด และใครมีเงินน้อยที่สุด เพราะเหตุใด

ปัญหาข้างต้นเป็นเรื่องของการเปรียบเทียบจำนวนเต็ม ซึ่งการสอนเนื้อหาในในห้องเรียนผู้สอน มักให้ผู้เรียนเปรียบเทียบจำนวนเต็มหลายๆ จำนวน หรือให้เรียงลำดับจำนวนที่กำหนดให้จากน้อยไปมาก หรือจากมากไปน้อย เช่น ให้เรียง -12, 56, -65, 118, 0, และ 181 จากน้อยไปมาก ซึ่งการให้ทำงานดังกล่าว ผู้เรียนจะได้ใช้การคิณ้อยมาก แต่เมื่อสร้างเป็นสถานการณ์ดังเช่นปัญหาของป๋ม ป้อม และป๊อด ผู้เรียนจะได้ใช้การคิดมากกว่า และคิดในหลากหลายรูปแบบ ทั้งที่เป็นการเปรียบเทียบเฉพาะจำนวนเต็มบวกเท่านั้น ในการคิดดังกล่าว ผู้เรียนอาจได้คำตอบเหมือนกันคือป๊อดมีเงินมากที่สุด เพราะเสียเงินซื้อของมากที่สุด แต่กลับเหลือเงินเท่ากับคนอื่น ในขณะที่ป้อมมีเงินน้อยที่สุด เพราะได้เงินเพิ่มจากการเกม แต่กลับมีเงินเท่ากับคนอื่นซึ่งจ่ายเงินออกไป อย่างไรก็ตาม แม้คำตอบของผู้เรียนเหมือนกัน แต่เหตุผลของแต่ละคนอาจแตกต่างกันตามวิธีคิด บางคนอาจใช้การคิดเชิงเปรียบเทียบเพื่อหาจำนวน ทั้งสามบนเส้นจำนวน บางคนอาจใช้การคิดเชิงตรรกะเกี่ยวกับการเพิ่มขึ้นและลดลง และบางคนอาจใช้ วิธีอื่นที่แตกต่างออกไป ซึ่งล้วนเกี่ยวข้องกับความคิดทางคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น

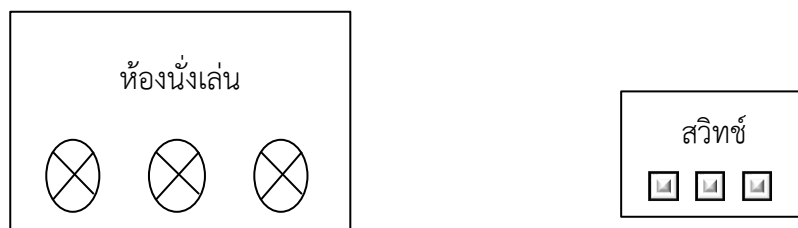
ตัวอย่างที่ 7 : วัดปริมาตรน้ำ

ถ้าต้องการใช้น้ำ 1 ลิตร เพื่อผสมปุ๋ยรดต้นไม้ แต่ในบ้านไม่มีภาชนะขนาด 1 ลิตร อยู่เลย ท่านจะใช้อะไรแทนได้บ้าง

เนื่องจากการผสมปุ๋ยเพื่อใช้รดน้ำต้นไม้ จึงสามารถใช้การประมาณได้ในกรณี อาจใช้ภาชนะที่มีอยู่ในบ้าน เช่น ขวดน้ำอัดลม ซึ่งมักมีปริมาตร 1.25 ลิตร หรือ 2 ลิตร ถ้าใช้ขวดขนาด 1.25 ลิตร ให้ประมาณน้ำ $\frac{4}{5}$ ของขวด จะได้น้ำประมาณ 1 ลิตร แต่ถ้าใช้ขวดขนาด 2 ลิตร ให้ประมาณ น้ำ $\frac{1}{2}$ ของขวด จะได้น้ำประมาณ 1 ลิตร เช่นกัน นอกจากนี้ ยังมีภาชนะอื่น ๆ ที่อาจใช้ได้ อีก เช่น เหยือกน้ำหรือแก้วน้ำที่ทราบความจุสถานการณ์นี้จึงใช้ฝึกการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับ เรื่องของปริมาตรและการประมาณ

ตัวอย่างที่ 8 : จับคู่ดวงไฟกับสวิทช์

ห้องนั่งเล่นในบ้านหลังหนึ่งมีหลอดไฟ 3 ดวง แต่ละดวงเชื่อมต่อกับสวิทช์ปิดเปิด 1 ตัว สวิทช์ ไฟทั้งสามตัวอยู่นอกห้องนั่งเล่น เจ้าของบ้านมักเปิดสวิทช์ก่อนเข้าไปในห้อง โดยมักเปิดผิด คือเปิดของ ไฟดวงที่ไม่ต้องการใช้งาน เนื่องจากไม่ทราบว่าสวิทช์ตัวใดเป็นของไฟดวงไหน ถ้าเจ้าของบ้านต้องการ แก้ปัญหานี้ด้วยการติดฉลากบนสวิทช์แต่ละตัวว่าเป็นของไฟดวงใด เป็นไปได้หรือไม่ที่เขาจะจับคู่หลอดไฟกับสวิทช์ทุกคู่ได้อย่างถูกต้อง โดยเดินเข้าไปในห้องเพียงครั้งเดียว ถ้าได้ เขาจะมีวิธีการอย่างไร



การฝึกการคิดตามสถานการณ์นี้ ผู้เรียนจะได้ใช้การคิดเชิงตรรกะว่าควรทำงานอะไรก่อนหลัง เพื่อที่จะแก้ปัญหาได้ อีกทั้งยังต้องใช้การวิเคราะห์ว่าการเปิดไฟแต่ละครั้งทำให้เกิดอะไรบ้าง เช่น แสงสว่าง ความร้อน ซึ่งคำถามที่ถามว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่เขาจับคู่หลอดไฟกับสวิตช์ได้ถูกต้องทุกคู่ โดยเดินเข้าไปในห้อง เพียงครั้งเดียวนั้น คำตอบคือเป็นไปได้ ถ้าเขาเปิดสวิตช์ตัวใดตัวหนึ่งไว้หนึ่งตัวไว้นานพอ จากนั้นเปิดสวิตช์อีกตัว ปิดสวิตช์ตัวแรก แล้วเดินเข้าไปในห้อง เขาจะทราบว่า สวิตช์ตัวที่เปิดครั้งที่สองนี้เป็นของไฟดวงที่สว่างอยู่ จากนั้น จับคู่หลอดไฟที่เหลืออีกสองหลอด หลอดที่ยังร้อนอยู่คือหลอดที่มีสวิตช์ ตัวที่เปิดครั้งแรก ส่วนสวิตช์ อีกตัวที่ยังไม่ได้เปิด เป็นของหลอดไฟดวงที่เหลือ การแก้ปัญหาใน สถานการณ์นี้เป็นตัวอย่างของการใช้การคิดเชิงตรรกะ ซึ่งเป็นการคิดทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับ การแก้ปัญหาในชีวิตจริง ตัวอย่างสถานการณ์ข้างต้น แสดงถึงการสร้างประเด็นปัญหาหรือสถานการณ์เพื่อให้ผู้เรียนได้ ใช้ความรู้ ความสามารถ และประสบการณ์ที่มี ในการฝึกการคิดทางคณิตศาสตร์ เพื่อที่จะหาข้อสรุป แก้ปัญหา หรือตัดสินใจอย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากการสร้างประเด็นปัญหาหรือสถานการณ์เพื่อ การคิดให้ผู้เรียนแล้ว ผู้สอนอาจฝึกให้ผู้เรียนรักการคิดโดยเริ่มจากสิ่งที่ทำได้ไม่ยากนัก ดังนี้

1. ให้ผู้เรียนคิดในสิ่งที่พอคิดได้ หรือไม่ยากเกินไปจนคิดอย่างไรก็คิดไม่ได้
2. พยายามถามหาเหตุผลกับผู้เรียนบ่อยๆ เพื่อฝึกให้ผู้เรียนได้คิด
3. ให้ผู้เรียนคิดในสิ่งที่สนใจและต้องการคิด
4. ฝึกให้คิดบ่อย ๆ เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความคุ้นเคยและมีความพยายามในการคิด
5. ฝึกการคิดที่หลากหลาย เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดสังเคราะห์ การคิดนอกกรอบ การคิดเชื่อมโยง การคิดไตร่ตรอง การคิดเชิงตรรกะ

6. ปรับเปลี่ยนสถานการณ์หรือเงื่อนไขของปัญหาให้ท้าทายการคิด
7. ถามคำถามที่น่าสนใจ น่าคิด และไม่ใช่คำถามธรรมดาที่ผู้เรียนคุ้นเคย
8. ค่อยๆ ฝึกจากการคิดระดับต่ำสู่การคิดระดับสูง

จากที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าการพัฒนาทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียนเป็นสิ่ง สำคัญ ยิ่ง เพราะการคิดทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือสำคัญที่จะทำให้ผู้เรียนเรียนรู้และแก้ปัญหาในชีวิตจริง อันจะ ทำให้เกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ การสอนหรือการจัดการเรียนรู้ทั้งใน และนอกห้องเรียนจึง

ต้องมุ่งให้ผู้เรียน “ได้คิด” “คิดได้” และ “คิดเป็น” มากขึ้น แม้จะเป็นเรื่องที่ต้องใช้เวลาและความพยายามของทั้งผู้เรียนและผู้สอน แต่ก็ เป็นสิ่งที่มีคุณค่ายิ่ง เนื่องจากการพัฒนาเครื่องมือสำคัญสำหรับการนำความรู้คณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง

เอกสารอ้างอิง

- Carraher, T. & Schliemann, A. (1985). *Computation routines prescribed by schools: Help or hindrance?*. journal for research in Mathematics Education.
- Fraivillig, J. (2001). Strategies For Advancing Children's Mathematical Thinking. *Teaching Children Mathematics*, 8 (7), 454-459.
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and Problem Solving : Handbook for elementary school teacher*. Boston: Allyn and Bacon.
- Novak, J. D. and Gowin, D. B. (1984). *Learning how to learning*. London: Cambridge university press.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2002). *From unknown amounts to representing variables*. In *Proceedings of the XIV Annual Meeting Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*. Athens, GA: ERIC Clearinghouse.
- Williams, K., & Paulhus, D. L. (2002). *The hierarchical factor structure of the Self-Report Psychopathy scale*. Presented at the meeting of the Canadian Psychological Association, Vancouver, Canada.