Journal of Education Studies
วารสารครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีที่ 51 ฉบับที่ 1 EDUCU5101004 (14 pages) doi: 10.14456/educu.2023.4

ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน : องค์ประกอบและแนวทางการประเมิน

Mathematical Knowledge for Teaching: Components and Assessment

ศันสนีย์ เณรเทียน[1] และ จงกล ทำสวน[2*]
Sansanee Nenthien[1] and Jongkol Thamsuan[2*]

บทคัดย่อ

ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน เป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานที่เกี่ยวกับการสอน ในบทความนี้จะนำเสนอองค์ประกอบของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน คือ ความรู้ด้านเนื้อหา ความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา ความรู้ด้านเนื้อหาในแนวราบ ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและนักเรียน ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและการสอน และความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและหลักสูตร ซึ่งจะนำเสนอความหมาย ลักษณะสำคัญของความรู้ และตัวอย่าง ในส่วนของความรู้เฉพาะด้านเนื้อหาที่เป็นความรู้และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเฉพาะสำหรับการสอน จะนำเสนอในลักษณะพฤติกรรมที่ครูแสดงออกผ่านการอธิบายความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งความรู้เชิงมโนทัศน์และเชิงกระบวนการ การเลือกใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ และการตัดสินความถูกต้องและสมเหตุสมผลของงานทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ในบทความจะนำเสนอตัวอย่างของคำถามที่ใช้ในการประเมินความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนจำแนกตามองค์ประกอบ ซึ่งครูและนักการศึกษาสามารถนำคำถามไปใช้เป็นแนวทางในการประเมินคุณภาพครูคณิตศาสตร์ตลอดจนการพัฒนาและเตรียมความพร้อมของนักศึกษาครู

คำสำคัญ *:* ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน, ความรู้ทางคณิตศาสตร์, ความรู้ในเนื้อหาผสานวิธีสอน, การประเมินครู

Article Info: Received 12 October, 2022; **Received in revised form** 28 January, 2023; **Accepted** 8 February, 2023

[1] อาจารย์ประจำสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อีเมล : sansanee.n@chula.ac.th
Lecturer in Division of Mathematics Education, Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education, Chulalongkorn University
Email : sansanee.n@chula.ac.th

[2] อาจารย์ประจำสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อีเมล : jongkol.t@chula.ac.th
Lecturer in Division of Mathematics Education, Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education, Chulalongkorn University
Email : jongkol.t@chula.ac.th

***** Corresponding Author

Abstract

Mathematical knowledge for teaching is the mathematical knowledge used to achieve the work of teaching. This article presents the components of mathematical knowledge for teaching, consisting of common content knowledge, specialized content knowledge, horizon content knowledge, knowledge of content and students, knowledge of content and teaching, and knowledge of content and curriculum. Consequently, these components are described in terms of meaning, characteristics, and examples. Specialized content knowledge, or the mathematical knowledge, skills, and processes unique to teaching, is shown through teachers' behaviors when explaining conceptual and procedural knowledge in mathematics, selecting mathematical representation, and justifying the accuracy and reasonability of students' mathematical tasks. In addition, some assessment questions of mathematical knowledge for teaching are presented in each of the components; as a result, mathematics teachers and educators can utilize these questions as a guideline for assessing the quality of mathematics teachers as well as developing and preparing preservice teachers.

Keywords: mathematical knowledge for teaching, mathematical knowledge, pedagogical content knowledge, teacher assessment

บทนำ

หากมองภาพของครูคณิตศาสตร์ท่านหนึ่ง สิ่งหนึ่งที่พึงมีในครูท่านนั้นคือ การเป็นครูที่มีความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้งและสามารถถ่ายทอดความรู้ให้กับนักเรียนได้ ซึ่งสอดคล้องกับส่วนหนึ่งของสมรรถนะครูที่กำหนดโดยคุรุสภาด้านเนื้อหาวิชาที่สอน หลักสูตร ศาสตร์การสอน และเทคโนโลยีดิจิทัลในการจัดการเรียนรู้ที่กำหนดว่า ครูต้องรอบรู้ในเนื้อหาของสาขาวิชาเอกที่สอน และบูรณาการองค์ความรู้ในวิชาเอกสำหรับการเรียนการสอนได้ (ข้อบังคับคุรุสภา ว่าด้วยมาตรฐานวิชาชีพ ฉบับที่ 4 พ.ศ. 2562, 2563) และสอดคล้องกับการที่ครูต้องมีความรู้ด้านเนื้อหา (Content Knowledge: CK) ที่หมายถึง ความรู้ที่เป็นเนื้อหาสาระ (subject matter knowledge) ที่จะต้องใช้ในการเรียนการสอน และความรู้ในเนื้อหาผสานวิธีสอน (Pedagogical Content Knowledge: PCK) ที่หมายถึงความรู้ด้านการสอน ทั้งวิธีสอน สื่อการสอน หลักสูตร และการประเมินผลที่ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับการสอนเนื้อหาเฉพาะของวิชา จะเห็นได้ว่าครูคณิตศาสตร์จำเป็นต้องมีความรู้ในหลายด้าน ซึ่ง Ball and Bass (2003) ได้ศึกษาเกี่ยวกับความรู้ของครูโดยพิจารณาจากงานเกี่ยวกับการสอน เพื่อศึกษาว่าครูจะต้องมีความรู้ใดบ้างเกี่ยวกับการสอนในรายวิชาที่จะทำให้การสอนเป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ จนพัฒนาเป็นทฤษฎีเชิงปฏิบัติของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน (Mathematical Knowledge for Teaching: MKT) ในบทความนี้จะนำเสนอความหมายของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน การระบุองค์ประกอบของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน และการยกตัวอย่างคำถามที่ใช้ในการประเมินความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนของครูคณิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียดดังนี้

ความหมายของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน

นักวิชาการได้ให้ความหมายของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนไว้หลายท่าน เช่น Hill et al (2005) กล่าวว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานที่เกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ โดยมีตัวอย่างของงานที่เกี่ยวกับการสอน เช่น การอธิบายคำศัพท์และมโนทัศน์ให้กับนักเรียน การทำความเข้าใจคำพูดหรือคำตอบ

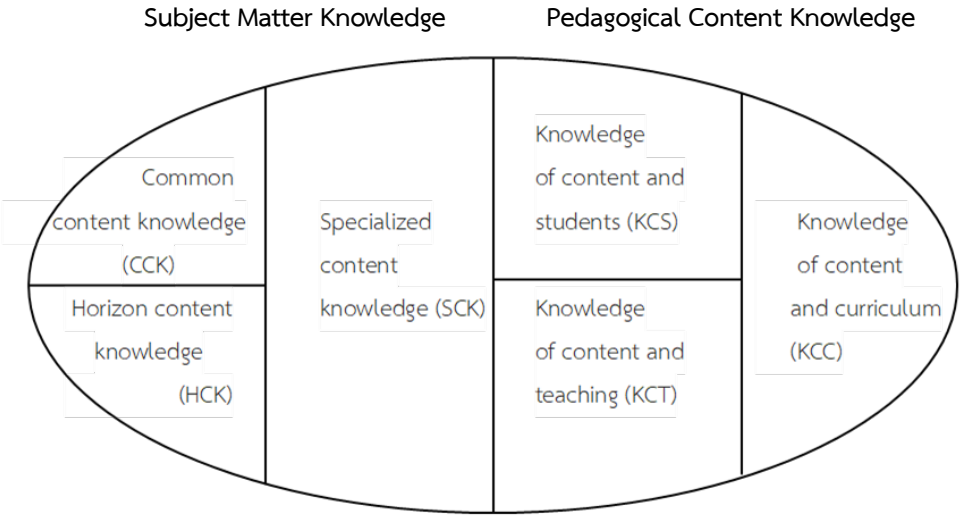
ของนักเรียน การวิเคราะห์บทเรียนหรือเนื้อหาที่จะนำมาสอน การเตรียมตัวอย่างที่สอดคล้องกับมโนทัศน์ให้กับนักเรียน เป็นต้น นอกจากนี้ Phelps and Howell (2016) ได้ให้ความหมายของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนว่าเป็นความรู้ในเนื้อหาที่ถูกใช้ในการสอนเพื่อช่วยในการแยกแยะ การทำความเข้าใจ การหาคำตอบเมื่อต้องเผชิญกับปัญหาหรืองานทางคณิตศาสตร์ ซึ่ง Hill et al (2008) ได้กล่าวว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนไม่เพียงแต่เป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการทำงานของแต่ละบุคคลที่มีการประกอบอาชีพที่หลากหลาย แต่ยังหมายรวมถึงความรู้ที่เป็นเนื้อหาสาระที่จะใช้ในการสนับสนุนการสอน เช่น การใช้และการเลือกใช้ขั้นตอนเฉพาะทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสม การนิยามคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับนักเรียนในแต่ละระดับชั้น มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนหรือข้อผิดพลาดของนักเรียนที่อาจเกิดขึ้นในแต่ละเนื้อหา จากที่กล่าวมา ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน จะหมายถึง ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานที่เกี่ยวกับการสอน ซึ่งเป็นความรู้เฉพาะที่ครูคณิตศาสตร์จำเป็นต้องมีเพื่อสนับสนุนการเรียนรู้ของนักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเห็นว่าไม่ใช่เพียงการมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับผิวเผิน หรือเพียงมีความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปใช้งานได้ แต่จะต้องรู้ลึกเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับตัวแทนความคิด ความรู้เกี่ยวกับแนวทางการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อจะนำไปใช้ในการสอนคณิตศาสตร์

องค์ประกอบของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน

Ball et al (2008) ได้เสนอองค์ประกอบของความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสอนไว้ 6 องค์ประกอบ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มความรู้ด้านเนื้อหาสาระ (Subject Matter Knowledge) และกลุ่มความรู้ในเนื้อหาผสานวิธีสอน (pedagogical content knowledge) ดังภาพ 1

ภาพ 1

องค์ประกอบของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนตามแนวคิดของ Ball et al (2008)



โดยกลุ่มความรู้ด้านเนื้อหาสาระ ประกอบด้วย ความรู้ด้านเนื้อหา (CCK) ความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา (SCK) และความรู้ด้านเนื้อหาในแนวราบ (HCK) และกลุ่มความรู้ในเนื้อหาผสานวิธีสอน ประกอบด้วย ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและนักเรียน (KCS) ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและการสอน (KCT) และความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและหลักสูตร (KCC) โดยมีรายละเอียดของแต่ละองค์ประกอบ (Ball et al., 2008; Chua, 2020; Mosvold & Fauskanger, 2014; Petrou & Goulding, 2011) ดังนี้

1. ความรู้ด้านเนื้อหา (Common Content Knowledge: CCK) เป็นความรู้และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นำไปใช้ในบริบทอื่นๆ นอกเหนือจากการสอน เช่น ความรู้ที่ใช้ในการหาว่า 36 นำไปหักจาก 195 จะเหลือเท่าไร คนทั่วไปสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนวิธีในการบวกลบจำนวนเต็มเพื่อหาคำตอบได้ หรือใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนด้วยการนำ 195 ลบออกด้วย 35 ก่อน จากนั้นจึงลบออกด้วย 1 โดยไม่จำเป็นต้องเข้าใจที่มาของขั้นตอนวิธีเหล่านั้น

2. ความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา (Specialized Content Knowledge: SCK) เป็นความรู้และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเฉพาะสำหรับการสอน และความรู้เกี่ยวกับความผิดพลาดของนักเรียนที่อาจเกิดขึ้นในแต่ละเนื้อหาคณิตศาสตร์ เช่น การหาว่า 36 นำไปหักจาก 195 จะเหลือเท่าไร หากใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนในการหาคำตอบด้วยการทำให้ตัวตั้งและตัวลบเป็นจำนวนที่ง่ายขึ้นโดยนำ 4 มาบวกเพิ่มทั้งตัวตั้งและตัวลบก่อน แล้วจึงนำจำนวนมาลบกัน จะสามารถหาคำตอบได้ แต่ในการที่จะยืนยันว่าวิธีคิดนี้เป็นวิธีหาคำตอบที่ถูกต้อง ต้องมีความรู้เฉพาะ คือ ความรู้เรื่องสมบัติการเท่ากันในการอธิบายการหาคำตอบว่า 195 − 36 = (195 + 4) − (36 + 4) = 199 − 40 = 159 ในส่วนของความรู้เกี่ยวกับความผิดพลาดของนักเรียน เช่น นักเรียนจะถูกสอนเสมอว่าการหา $\sqrt{32}$ ทำได้โดยการแยกตัวประกอบของ 32 เป็น $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ หากมีจำนวนใดที่ซ้ำกันสองตัวให้ดึงออกมานอกเครื่องหมายกรณฑ์หนึ่งตัว จนเมื่อนักเรียนเจอกับการหาคำตอบของ $\sqrt{x^2}$ คำตอบที่ได้จากความคุ้นชินคือ x ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง เมื่อ x เป็นจำนวนลบ

3. ความรู้ด้านเนื้อหาในแนวราบ (Horizon Content Knowledge: HCK) เป็นความรู้ในการระบุได้ว่าหัวข้อทางคณิตศาสตร์ใดในหลักสูตรที่สัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกับเนื้อหาที่จะสอน รวมถึงเป็นความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของหัวข้อต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น หากเนื้อหาที่จะสอน คือ ปริมาตรของทรงสามมิติ หัวข้อเรื่องที่ต้องเรียนมาก่อน คือ พื้นที่ผิวของรูปเรขาคณิตสองมิติ และลักษณะของรูปเรขาคณิตสามมิติ หากพิจารณาเรื่องสมการวงกลม จะพบหัวข้อที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน คือ การดำเนินการของจำนวนจริง เลขยกกำลัง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ระยะทางระหว่างจุดสองจุด โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับภาคตัดกรวย เป็นต้น

4. ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและนักเรียน (Knowledge of Content and Students: KCS) เป็นการผสมผสานระหว่างการรู้เกี่ยวกับนักเรียนและการรู้เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ ครูต้องคาดเดาความคิดของนักเรียนที่อาจเกิดขึ้น และประเด็นที่นักเรียนอาจเกิดความสับสนเกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ เช่น ความรู้เรื่องการเปลี่ยนหน่วยของพื้นที่รูปเรขาคณิตสองมิติจากหน่วยตารางวาเป็นตารางเมตร จากความรู้พื้นฐานว่า 1 วา เท่ากับ 2 เมตร ครูสามารถคาดได้ว่านักเรียนอาจเผลอขยายความคิดว่าพื้นที่ 1 ตารางวา เท่ากับ 2 ตารางเมตร ซึ่งไม่ถูกต้อง ความรู้เกี่ยวกับการเรียกกรณฑ์ที่สอง นักเรียนอาจสับสนในการเรียกกรณฑ์ที่สองของ 4 ด้วยคำว่ารากที่สองของ 4 ซึ่งรากที่สองของ 4 มีสองค่าคือ 2 และ -2 ในขณะที่กรณฑ์ที่สองของ 4 หรือ $\sqrt{4}$ คือ 2 เท่านั้น

5. ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและการสอน (Knowledge of Content and Teaching: KCT) เป็นการผสมผสานกันของการรู้เกี่ยวกับการสอนและการรู้เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ ครูต้องจัดเรียงลำดับเนื้อหา ระบุและกำหนดลำดับของตัวอย่างที่ใช้ในการสอนที่ค่อย ๆ ไต่ระดับความรู้ และเลือกวิธีสอนหรือรูปแบบการสอนที่เหมาะสมกับเนื้อหาและตัวอย่างที่กำหนด เช่น การสอนสูตรปริมาตรกรวยเมื่อทราบสูตรของปริมาตรทรงกระบอกมาก่อน วิธีสอนที่เหมาะกับเนื้อหานี้อาจเป็นวิธีการสอนโดยใช้การทดลอง

6. ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและหลักสูตร (Knowledge of Content and Curriculum: KCC) เป็นความเข้าใจของครูเกี่ยวกับหลักสูตรและการเรียนการสอนทั่วไป เช่น เป้าหมายของหลักสูตร หลักสูตรทางเลือก ความรู้เกี่ยวกับการบูรณาการเนื้อหาคณิตศาสตร์ภายในกลุ่มสาระและระหว่างกลุ่มสาระการเรียนรู้

ข้อมูลจากภาพ 1 และความหมายขององค์ประกอบข้างต้นแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ที่เป็นเนื้อหาสาระและความรู้ในเนื้อหาผสานวิธีสอน โดยมีความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา (SCK) เป็นองค์ประกอบสำคัญที่เชื่อมต่อกับการรู้เกี่ยวกับการสอนและนักเรียนเพื่อจะนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้บรรลุเป้าหมายหลัก นั่นคือ

การมุ่งเน้นให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงได้ ในหัวข้อถัดไปจึงขออธิบายและขยายความรายละเอียดของความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา ดังนี้

ความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา (SCK)

ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ สิ่งที่ครูต้องพัฒนานักเรียนคือความรู้และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ คือ ความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ครูต้องเข้าใจความรู้ทั้งสองอย่างลึกซึ้ง ทั้งความหมาย ลักษณะสำคัญและความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นเกี่ยวกับความรู้นั้น และในด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ครูต้องใช้ความสามารถต่าง ๆ ในงานทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเชี่ยวชาญ จนสามารถเลือกวิธีการในการอธิบาย เลือกใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ รวมถึงตัดสินเกี่ยวกับงานทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับความรู้นั้นได้ ซึ่งความรู้และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาเป็นความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา จากแนวคิดของ Ding (2016) และ Lai and Clark (2018) พฤติกรรมของครูที่แสดงออกถึงความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา มี 3 ลักษณะ ดังนี้

1. การอธิบาย (explanation) เป็นการแสดงความรู้ทางคณิตศาสตร์ผ่านการอธิบายความรู้ทางคณิตศาสตร์ในสองลักษณะ คือ การอธิบายความรู้เชิงมโนทัศน์ และการอธิบายความรู้เชิงกระบวนการ

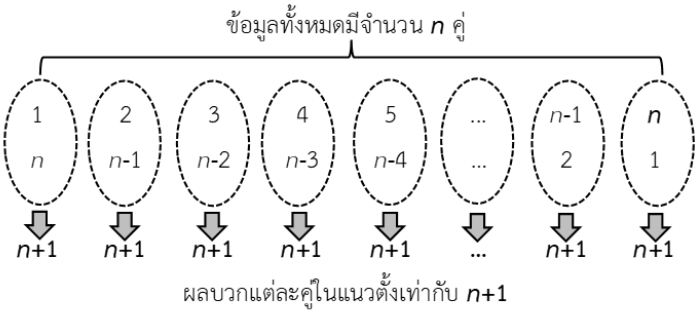
1.1 การอธิบายความรู้เชิงมโนทัศน์ หมายถึง การอธิบายความรู้โดยใช้นิยาม สมบัติที่เรียนมาก่อนหน้า และการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เช่น การอธิบายนิยามของตัวคูณร่วมน้อยของจำนวนสองจำนวน โดยใช้นิยามของตัวประกอบหรือพหุคูณของสองจำนวนนั้น การอธิบายนิยามของวงกลมโดยใช้นิยามระยะทางระหว่างจุดสองจุดและเซต การอธิบายนิยามของอินเวอร์สของสมาชิก x ใด ๆ ของเซตภายใต้การดำเนินการ * ของเซต ต้องทราบว่าเซตภายใต้การดำเนินการนั้นสามารถหาเอกลักษณ์ e ได้ก่อน และมี y ที่ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข $x * y = e = y * x$ และจะเรียก y ว่า อินเวอร์สของ x แต่หากเจอ z ที่ $x * z = e$ แต่ $z * x \neq e$ จะถือว่า z ไม่ใช่อินเวอร์สของ x หากขยายความนิยามนี้กับสมบัติการมีอินเวอร์สของเซตจะพบว่า ทุกสมาชิกของเซตไม่จำเป็นต้องหาอินเวอร์สได้และหากสมาชิกใดหาอินเวอร์สได้อาจไม่สามารถสรุปได้ว่าอินเวอร์สของสมาชิกนั้นมีเพียงตัวเดียว นอกจากนี้ยังหมายรวมถึงการอธิบายความรู้เชิงมโนทัศน์ในรูปนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ให้มีความหมายโดยใช้บริบทในชีวิตประจำวันหรือบริบทที่เป็นรูปธรรมมาอธิบาย เช่น หากนำเสื้อที่แตกต่างกัน 3 ตัว กางเกงที่แตกต่างกัน 4 ตัว และมีรองเท้าที่แตกต่างกัน 2 คู่ มาจัดเป็นชุดแต่งกาย จะจัดชุดแต่งกายที่แตกต่างกัน โดยไม่คำนึงความสวยงาม ได้ทั้งหมดกี่แบบ นักเรียนสามารถตอบโดยใช้การทดลองจัดหรือการใช้แผนภาพต้นไม้ในการหาจะได้จำนวนแบบเท่ากับ $3 \times 4 \times 2$ แบบ ซึ่งครูสามารถอธิบายเชื่อมโยงกับการทำงาน 1 งานที่ขั้นตอนการทำงานต่อเนื่อง แต่ละขั้นตอนมีวิธีที่แตกต่างกัน จนนำไปสู่มโนทัศน์เรื่องหลักการนับเบื้องต้นในส่วนของกฎการคูณได้

1.2 การอธิบายความรู้เชิงกระบวนการ หมายถึง การอธิบายกฎและขั้นตอนวิธีการให้ชัดเจนขึ้น ประกอบไปกับการทำงานทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นลำดับขั้นตอน ตัวอย่างเช่น การอธิบายขั้นตอนการหาตัวคูณร่วมน้อยของจำนวนสามจำนวนโดยวิธีตั้งหาร ด้วยการยกตัวอย่างพร้อมกับอธิบายขั้นตอนประกอบการหาตัวคูณร่วมน้อยทีละขั้นตอน

2. ตัวแทนความคิด (representation) หมายถึง การแสดงความรู้เกี่ยวกับตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ที่ครูต้องสามารถเลือก สร้างหรือใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะกับการสอน เช่น ผลรวมของจำนวนนับที่เรียงติดกันตั้งแต่ 1 ถึง n ใดๆ มีตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์หลายแบบ ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์หนึ่งคือ สูตรผลรวมเท่ากับ $\frac{n(n+1)}{2}$ ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ อาจเป็นแผนภาพของจำนวน ดังแสดงในภาพ 2

ภาพ 2

จำนวนแสดงการหาผลรวมของนับที่เรียงติดกันตั้งแต่ 1 ถึง n ใดๆ



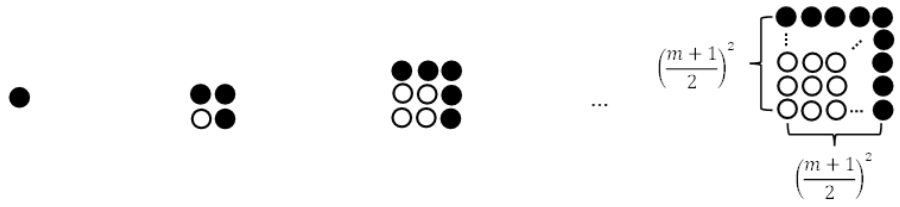
แผนภาพข้างต้นเป็นการเขียนจำนวนนับที่เรียงติดกันตั้งแต่ 1 ถึง n ใด ๆ จำนวน 2 ชุด โดยชุดแรกเขียนเรียงจาก 1 ถึง n ในขณะที่ชุดที่สองเขียนเรียงจาก n, n-1, n-2, ... , 3, 2, 1 เมื่อจับคู่ในแนวตั้งจะได้ทั้งหมด n คู่ และผลรวมในแต่ละคู่เท่ากับ n +1 ดังนั้นผลรวมของจำนวนทั้งหมดจึงเท่ากับ $n(n+1)$ แต่เนื่องจากต้องการหาผลรวมของจำนวนนับที่เรียงติดกันตั้งแต่ 1 ถึง n เพียงชุดเดียว จึงได้ว่า ผลรวมของจำนวนนับที่เรียงติดกันตั้งแต่ 1 ถึง n เท่ากับ $\frac{n(n+1)}{2}$

แนวคิดของการใช้แผนภาพข้างต้นสามารถขยายไปสู่วิธีการหาผลรวมของจำนวนคู่ที่เรียงติดกันตั้งแต่ 2, 4, 6, 8, ... , n ใด ๆ และ ผลรวมของจำนวนคี่ที่เรียงติดกันตั้งแต่ 1, 3, 5, 7, ... , m ใดๆ ได้เช่นกัน นั้นคือ ผลรวมของจำนวนคู่หรือคี่ที่เรียงติดกันจะเท่ากับ $\frac{\text{จำนวนคู่ในแนวตั้ง} \times \text{ผลบวกของแต่ละคู่}}{2}$

นอกจากนี้ อาจใช้ตัวแทนความคิดในลักษณะอื่น เช่น การใช้แผนภาพจุด ในการหาผลรวมของจำนวนคี่ที่เรียงติดกันตั้งแต่ 1, 3, 5, 7, ... , m ใด ๆ จากการพิจารณาการเพิ่มขึ้นของจำนวนจุดทึบสีดำ ดังแสดงในภาพ 3 เมื่อพิจารณาแล้วจะเห็นว่าผลรวมของจำนวนคี่ที่เรียงติดกันตั้งแต่ 1, 3, 5, 7, ... , m ใด ๆ เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดจากการเรียงกันของจุดที่มีความยาวด้าน ด้านละ $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$ จุด

ภาพ 3

จุดแสดงการหาผลรวมของจำนวนคี่ที่เรียงติดกันตั้งแต่ 1 ถึง m ใด ๆ



ผลรวม $1^2 = \left(\frac{1+1}{2}\right)^2$ $2^2 = \left(\frac{3+1}{2}\right)^2$ $3^2 = \left(\frac{5+1}{2}\right)^2$ ... $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$

3. การตัดสิน (justification) หมายถึง การแสดงความรู้ในการตัดสินความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ทั้งงานที่เป็นตัวเลขและไม่ใช่ตัวเลข เช่น สำหรับข้อความ $\frac{69}{4}$ = 17.25 หากแทนเป็นประโยค

สัญลักษณ์ในสถานการณ์แบ่งเชือกยาว 69 เมตร ออกเป็น 4 เส้นเท่ากัน แต่ละเส้นจะยาวเท่าใด หากนักเรียนให้คำตอบ คือ 17.25 จะเป็นคำตอบที่ถูกต้องและเหมาะสม แต่หากสถานการณ์ คือ มีนักเรียน 69 คน ต้องการจัดนั่งบนรถขนาด 4 ที่นั่ง จะต้องใช้รถอย่างน้อยทั้งหมดกี่คัน ซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง คือ 18 แต่หากพบว่านักเรียนตอบตามที่คำนวณได้เป็น 17.25 จะไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้อง เนื่องจากจำนวนรถต้องเป็นจำนวนนับ หรือหากตอบแบบปัดลงเป็น 17 คัน จะไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้องเช่นเดียวกัน เนื่องจากจำนวนที่นั่งรวมทั้งหมดจะมีเพียง 68 ที่นั่ง ซึ่งไม่เพียงพอกับจำนวนนักเรียน ทั้งนี้ครูต้องทราบว่านักเรียนคิดไม่ถูกต้องที่ประเด็นใด เช่น ผิดเพราะขาดการตรวจสอบกับบริบทของโจทย์ ผิดเพราะใช้การประมาณ

นอกจากนี้หากเป็นการทำโจทย์เขียนแสดงวิธีทำ ครูต้องไม่พิจารณาเพียงความถูกต้องของคำตอบ หากคำตอบไม่ถูกต้อง ครูต้องสามารถระบุได้ว่าขั้นตอนใดที่นักเรียนทำผิดพลาด เช่น สถานการณ์ สนามหญ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความยาวด้านละ 10 เมตร จงหาความยาวเส้นทแยงมุมของสนามหญ้านี้ โดยทั่วไปจะกำหนดให้ x แทนความยาวของเส้นทแยงมุม จากนั้นใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการหาคำตอบจนได้ว่า x^2 = 200 นักเรียนจะตอบทันทีว่า $x = \sqrt{200}$ จึงสรุปได้ว่าความยาวของของเส้นทแยงมุมเท่ากับ $\sqrt{200}$ หากครูพิจารณาเพียงข้อสรุปของคำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบที่ถูกต้อง แต่หากพิจารณาผลที่ได้จากสมการ x^2 = 200 และตอบเพียง $x = \sqrt{200}$ จะถือว่า คำตอบที่ได้ในขั้นตอนนี้ไม่ถูกต้อง นักเรียนจะต้องตอบทั้งค่าที่เป็นบวกและค่าที่เป็นลบ นั่นคือ $x = \pm\sqrt{200}$ แล้วจึงสรุปว่า คำตอบเป็นได้เฉพาะค่าที่เป็นบวกเท่านั้น เนื่องจาก x เป็นความยาวของเส้นทแยงมุมซึ่งเป็นค่าบวก

การประเมินความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนของครูคณิตศาสตร์

การประเมินคุณภาพครูคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้ข้อมูลที่สามารถนำไปพัฒนาความรู้หรือเตรียมความพร้อมของครูให้เต็มตามศักยภาพ สามารถออกแบบคำถามเพื่อประเมินความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนในองค์ประกอบต่าง ๆ ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างคำถาม 6 ข้อที่เน้นประเมินแต่ละองค์ประกอบตามลำดับ ดังนี้

คำถามที่ 1 ในการทำขนมชนิดหนึ่ง จะใช้ส่วนประกอบ 5 อย่าง คือ แป้งสาลี น้ำตาล เนยจืด ผงโกโก้ และข้าวโอ๊ต หากนักเรียนรู้ส่วนผสมของสูตรทำขนมชนิดนี้มาจาก 2 แหล่ง ที่แต่ละแหล่งให้ข้อมูลไม่ครบ ดังนี้

แหล่งที่ 1 ใช้แป้งสาลี 250 กรัม น้ำตาล 100 กรัม เนยจืด 150 กรัม

แหล่งที่ 2 ใช้เนยจืด 120 กรัม ผงโกโก้ 50 กรัม ข้าวโอ๊ต 90 กรัม

หากโจทย์ต้องการให้นักเรียนหาสูตรในการทำขนมจากแหล่งข้อมูลทั้งสองแหล่งข้างต้น และมีนักเรียน 4 คน ตอบคำถาม ดังนี้

นักเรียนคนที่ 1 ทำขนมโดยใช้แป้งสาลี 300 กรัม น้ำตาล 150 กรัม เนยจืด 200 กรัม ผงโกโก้ 130 กรัม ข้าวโอ๊ต 170 กรัม

นักเรียนคนที่ 2 ทำขนมโดยใช้ใช้แป้งสาลี 250 กรัม น้ำตาล 100 กรัม เนยจืด 150 กรัม ผงโกโก้ 80 กรัม ข้าวโอ๊ต 120 กรัม

นักเรียนคนที่ 3 ทำขนมโดยใช้แป้งสาลี 200 กรัม น้ำตาล 80 กรัม เนยจืด 120 กรัม ผงโกโก้ 50 กรัม ข้าวโอ๊ต 90 กรัม

นักเรียนคนที่ 4 ทำขนมโดยใช้แป้งสาลี 250 กรัม น้ำตาล 100 กรัม เนยจืด 270 กรัม ผงโกโก้ 50 กรัม ข้าวโอ๊ต 90 กรัม

จากคำตอบของนักเรียนแต่ละคนข้างต้น ครูคิดว่าคำตอบของนักเรียนเกิดจากการคิดในลักษณะใดหรือมีข้อผิดพลาดในเรื่องใด

เฉลยแนวคิดของคำตอบ

คำตอบของนักเรียนคนที่ 1 ไม่ถูกต้อง เพราะนักเรียนทราบว่าต้องมีการทำปริมาณของเนยจืดจากข้อมูลแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 ให้เท่ากัน จึงกำหนดปริมาณนั้นให้เป็น 200 กรัม แต่นักเรียนจะผิดพลาดในการใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนที่

เท่ากัน โดยใช้การเพิ่มปริมาณของส่วนประกอบต่าง ๆ ในปริมาณที่เท่ากัน แล้วคิดว่ายังคงเป็นอัตราส่วนเดิม นั่นคือ เมื่อต้องเพิ่มปริมาณเนยจืดจากข้อมูลแหล่งที่ 1 อีก 50 กรัม จึงเพิ่มปริมาณของแป้งสาลีและน้ำตาลชนิดละ 50 กรัมด้วย ขณะที่ต้องเพิ่มปริมาณเนยจืดจากข้อมูลแหล่งที่ 2 อีก 80 กรัม จึงเพิ่มปริมาณของผงโกโก้และข้าวโอ๊ต ชนิดละ 80 กรัมด้วย

คำตอบของนักเรียนคนที่ 2 ไม่ถูกต้อง เพราะนักเรียนทราบว่าต้องมีการทำปริมาณของเนยจืดจากข้อมูลแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 ให้เท่ากัน จึงบวกเพิ่มปริมาณของเนยจืดจากข้อมูลในแหล่งที่ 2 อีก 30 กรัมให้เป็น 150 กรัม แต่นักเรียนจะผิดพลาดในการใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนที่เท่ากัน จึงเพิ่มปริมาณของผงโกโก้และข้าวโอ๊ต ชนิดละ 30 กรัมด้วย

คำตอบของนักเรียนคนที่ 3 ถูกต้อง เพราะนักเรียนทราบว่าต้องมีการทำปริมาณของเนยจืดจากข้อมูลแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 ให้เท่ากัน จึงนำ $\frac{4}{5}$ คูณอัตราส่วนของปริมาณแป้งสาลีต่อน้ำตาลต่อเนยจืดของข้อมูลจากแหล่งที่ 1 เพื่อให้ปริมาณเนยจืดเป็น 120 กรัม จึงได้คำตอบที่ถูกต้อง

คำตอบของนักเรียนคนที่ 4 ไม่ถูกต้อง เพราะคาดว่านักเรียนไม่ทราบความหมายของของผสมที่ต้องมีการปรับส่วนผสมร่วมให้เป็นปริมาณเดียวกัน คือ เนยจืด นักเรียนจึงนำส่วนผสมจากข้อมูลทั้งสองแหล่งมาเทรวมกัน

คำถามข้อนี้หากครูคณิตศาสตร์สามารถระบุความถูกต้อง ระบุข้อผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้น หรือคาดเดาความสับสนในมโนทัศน์เรื่องอัตราส่วนที่เท่ากันจากคำตอบของนักเรียนได้ จะสะท้อนความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสอนใน 3 องค์ประกอบ คือ ความรู้ด้านเนื้อหา (CCK) ของครูในเรื่องอัตราส่วนที่เท่ากัน ความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา (SCK) ในประเด็นของการระบุและตัดสินเกี่ยวกับข้อผิดพลาดของนักเรียน และความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและนักเรียน (KCS) ในประเด็นของการคาดเดาความคิดของนักเรียนจากคำตอบว่านักเรียนสับสนในเรื่องใด ตามลำดับ

นอกจากนี้ การประเมินความรู้เฉพาะด้านเนื้อหา (SCK) ในส่วนของการอธิบายความรู้เชิงมโนทัศน์จะต้องออกแบบคำถามที่จะสะท้อนความสามารถในการวิเคราะห์นิยาม ลักษณะสำคัญของนิยาม และความรู้ที่เรียนมาก่อนหน้า ที่จะนำไปสู่การอธิบายได้ ดังตัวอย่างคำถามที่ 2

คำถามที่ 2 หากคุณครูสอนนิยามของเอกนามที่คล้ายกัน คือ เอกนามที่มีตัวแปรชุดเดียวกัน และเลขชี้กำลังของตัวแปรเดียวกันในแต่ละเอกนามเท่ากัน และต้องการประเมินความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับนิยามของเอกนามที่คล้ายกัน ครูควรเลือกคำถามใดเพื่อนำมาใช้ในการประเมิน พร้อมให้เหตุผลประกอบ

ชุดที่ 1) เอกนามแต่ละคู่ต่อไปนี้คล้ายกันหรือไม่ $2xy$ กับ $-xy$ และ xy^2 กับ $5x^2y^2$

ชุดที่ 2) เอกนามแต่ละคู่ต่อไปนี้คล้ายกันหรือไม่ $2xy$ กับ $-4xz$ และ xy^2 กับ $5x^2y^2$

ชุดที่ 3) เอกนามแต่ละคู่ต่อไปนี้คล้ายกันหรือไม่ $2xy$ กับ $4x^{-1}z$ และ xy^2 กับ $5xz^2$

เฉลยแนวคิดของคำตอบ

ควรเลือกชุดที่ 2 เพราะเป็นคำตอบที่สะท้อนถึงลักษณะสำคัญของนิยามความคล้ายกันของเอกนาม โดยเอกนามคู่แรกจะอธิบายลักษณะของชุดของตัวแปรที่แตกต่างกัน และเอกนามคู่ที่ 2 จะอธิบายลักษณะของเลขชี้กำลังของตัวแปรเดียวกันที่ไม่เท่ากันในแต่ละเอกนาม

หากเลือกชุดที่ 1 จะขาดการตรวจสอบลักษณะของชุดของตัวแปรที่แตกต่างกัน และหากเลือกชุดที่ 3 เอกนามคู่แรกจะเป็นการประเมินความรู้เรื่องเอกนามซึ่งเป็นความรู้ก่อนหน้าที่ไม่ใช่ลักษณะสำคัญของนิยามความคล้ายกันของเอกนามนี้

นอกจากนี้ คำถามข้อที่ 2 สามารถสะท้อนความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสอนในองค์ประกอบของความรู้ด้านเนื้อหา (CCK) ได้ เพราะครูต้องเข้าใจนิยามและยกตัวอย่างของเอกนามที่คล้ายกันและไม่คล้ายกันได้

สำหรับการประเมินความรู้ด้านเนื้อหาในแนวราบ (HCK) นอกจากสามารถประเมินโดยถามคำถามเกี่ยวกับเนื้อหาก่อนหน้าและเนื้อหาต่อเนื่องที่สัมพันธ์กันได้โดยตรงแล้ว ยังสามารถประเมินได้ด้วยการออกแบบคำถามให้ครูลงข้อสรุปของ

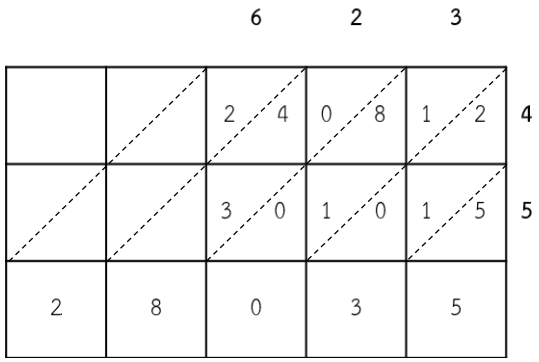
แนวคิดให้อยู่ในรูปนัยทั่วไปจากการสร้างความสัมพันธ์ของความรู้ที่มี โดยมีตัวอย่างคำถามซึ่งปรับจากคำถามของ Mosvold and Fauskanger (2014) ดังตัวอย่างคำถามที่ 3

คำถามที่ 3 ครูคนหนึ่งกำลังสอนเนื้อหาเรื่องการคูณจำนวนนับสองจำนวน ในระหว่างนี้นี้ครูสังเกตเห็นนักเรียนเขียนวิธีการในการหาผลคูณของ 623 และ 45 แสดงดังภาพ 4

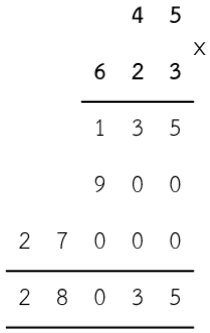
ภาพ 4

ตัวอย่างแสดงวิธีการหาผลคูณของจำนวนนับสองจำนวน ของนักเรียน 3 คน

นักเรียนคนที่ 1



นักเรียนคนที่ 2



นักเรียนคนที่ 3



วิธีการในการหาคำตอบของนักเรียนแต่ละคนสามารถนำไปใช้ได้กับการหาผลคูณของจำนวนนับ 2 จำนวนใดๆ ได้หรือไม่ จงเขียนเครื่องหมาย " ✓ " ลงในตารางในช่องที่คิดว่าข้อสรุปถูกต้อง

วิธีการ	**วิธีการนี้สามารถนำไปใช้ได้กับการคูณกันของจำนวนนับ 2 จำนวนใดๆ**	
	นำไปใช้ได้ทุกกรณี	**นำไปใช้ได้แต่อาจไม่ทุกกรณี**
นักเรียนคนที่ 1		
นักเรียนคนที่ 2		
นักเรียนคนที่ 3		

เฉลยแนวคิดของคำตอบ

วิธีการของนักเรียนคนที่ 1 สามารถนำไปใช้ได้ทุกกรณี เพราะเป็นการแสดงการหาผลคูณของจำนวนนับ 2 จำนวน คล้ายกับวิธีการหาผลคูณโดยวิธีมาตรฐาน แต่ที่แตกต่างจากวิธีมาตรฐานคือ การเขียนผลคูณของเลขโดดสองตัวใด ๆ ใส่ไว้ในช่องสี่เหลี่ยมที่ถูกแบ่งครึ่งตามแนวเส้นทแยงมุม แล้วค่อยนำมาบวกกันภายหลังตามแนวเส้นประ เช่น ผลลัพธ์ที่เป็น 3 ในหลักสิบ เกิดจากผลบวกในแนวเส้นประ คือ 2 + 0 + 1

วิธีการของนักเรียนคนที่ 2 สามารถนำไปใช้ได้ทุกกรณี เพราะเป็นการแสดงการหาผลคูณของจำนวนนับ 2 จำนวน โดยใช้สมบัติการแจงแจง ซึ่งแสดงผลลัพธ์ในแต่ละแถวกระจายตามค่าประจำหลัก นั่นคือ $45 \times 623 = 45 \times (3 + 20 + 600)$

วิธีการของนักเรียนคนที่ 3 สามารถนำไปใช้ได้ทุกกรณี เพราะเป็นการแสดงการหาผลคูณของจำนวนนับ 2 จำนวน โดยใช้สมบัติการแจงแจง ซึ่งแสดงผลลัพธ์ในแต่ละแถวเป็นการเลือกใช้ค่าของจำนวนที่นักเรียนอาจคุ้นเคย นั่นคือ 45 × 623 = 45 × (3 + 20 + 200 + 400)

นอกจากนี้ วิธีการของนักเรียนทั้งสามคนสามารถขยายแนวคิดไปใช้กับการหาผลคูณของจำนวน 2 จำนวนใด ๆ ในระบบตัวเลขฐานอื่นได้

ในคำถามที่ 3 นอกเหนือจากการให้ครูลงข้อสรุปเกี่ยวกับวิธีการในการหาผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนใด ๆ จากคำตอบของนักเรียน ซึ่งเป็นการแสดงว่าครูมีความรู้ด้านเนื้อหาในแนวราบ (HCK) แล้ว การที่ครูคาดเดาความคิดของนักเรียนโดยสัมพันธ์กับความรู้ของครูที่มีก่อนลงข้อสรุป สามารถสะท้อนได้ว่าครูมีความรู้ด้านเนื้อหาและนักเรียน (KCS) ร่วมด้วย

สำหรับการประเมินความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและนักเรียน (KCS) ครูต้องใช้ความรู้ด้านเนื้อหา (CCK) มาช่วยในการคาดเดาความคิดของนักเรียนและประเด็นที่นักเรียนอาจเกิดความสับสนเกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่างคำถามที่ 4

คำถามที่ 4 หากครูตั้งคำถามว่า $\sqrt{5}$ มีค่าประมาณเท่าไร (ตอบเป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง) โดยมีคำตอบ ดังนี้

นักเรียนคนที่ 1 ตอบว่า ประมาณด้วยจำนวนใดก็ได้ แต่ขอให้มากกว่า 2 แต่ไม่เกิน 2.5

นักเรียนคนที่ 2 ตอบว่า เอาจำนวน 2.1, 2.2, 2.3 และ 2.4 มายกกำลังสอง แล้วดูว่าจำนวนใดที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าใกล้ 5 มากที่สุดก็เลือกตัวนั้นเป็นคำตอบ

นักเรียนคนที่ 3 ตอบว่า รู้ว่า $\sqrt{5}$ มีค่ามากกว่า 2 แต่ไม่เกิน 2.5 จากนั้นลองหาค่าเฉลี่ยของ 2 กับ 2.5 เป็น 2.25 เมื่อพิจารณา 2.25^2 = 5.0625 แสดงว่า $\sqrt{5}$ จะมีค่าน้อยกว่า 2.25 จึงตอบ 2.2

นักเรียนคนที่ 4 ตอบว่า ดูว่าจำนวนอะไรคูณกันสองตัวแล้วใกล้กับ 5 คือ 2 จากนั้นนำ 4 ไปลบจาก 5 เหลือ 1 เมื่อมอง 1 เป็น 100 แล้วหาตัวเลขที่ทำให้ 4□ คูณกับ □ มีค่าใกล้ 100 ซึ่งได้เป็น 42 คูณด้วย 2 จึงตอบ 2.2

จงอธิบายแนวคิดหรือความรู้ที่ใช้ในการหาคำตอบของนักเรียนแต่ละคน

เฉลยแนวคิดของคำตอบ

คำตอบของนักเรียนคนที่ 1 แสดงว่า นักเรียนเข้าใจหลักการประมาณและเข้าใจความหมายของรากที่สองและรากที่สองที่เป็นบวก ซึ่งคำตอบที่ได้จะแสดงเพียงขอบเขตของคำตอบ แต่ไม่สามารถระบุได้ว่าคำตอบเป็นค่าใดและไม่ระบุวิธีการในการเลือกคำตอบที่เป็นค่าประมาณที่เหมาะสม

คำตอบนักเรียนคนที่ 2 คนที่ 3 และคนที่ 4 แสดงว่านักเรียนเข้าใจหลักการประมาณและเข้าใจความหมายของรากที่สองและรากที่สองที่เป็นบวก แต่เลือกใช้นิยามของรากที่สอง วิธีการหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ยและการปัดลง และวิธีการตั้งหาร ตามลำดับ เพื่อสนับสนุนคำตอบให้มีความใกล้เคียงค่าของ $\sqrt{5}$

ในการประเมินความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและการสอน (KCT) ซึ่งเป็นการประเมินความรู้ของครูคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการจัดลำดับเนื้อหา การกำหนดตัวอย่าง จนนำไปสู่การเลือกแนวทางในการสอนที่เหมาะกับเนื้อหาและตัวอย่างที่กำหนด ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญในการออกแบบแผนการจัดการเรียนรู้ ดังนั้นในการประเมินความรู้ด้านนี้สามารถพิจารณาจากแผนการจัดการเรียนรู้ของครูโดยตรง หรือใช้คำถามให้ครูได้เขียนสะท้อนแนวคิดบางส่วนของการออกแบบแผนการจัดการเรียนรู้ ดังตัวอย่างคำถามที่ 5

คำถามที่ 5 หากคุณครูต้องการสอนนิยามสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ที่ว่า “สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ เป็นการเขียนจำนวนในรูปการคูณที่มีเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น 10 และมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม โดยมีรูปทั่วไปเป็น $A \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq A < 10$ และ n เป็น

จำนวนเต็ม” โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักเรียนสามารถอธิบายความหมายของสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ได้ และยกตัวอย่างจำนวนในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ได้ จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1) จงระบุตัวอย่างที่เป็นสัญกรณ์วิทยาศาสตร์และตัวอย่างที่ไม่เป็นสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ที่ต้องใช้ในการสอนให้ครอบคลุมลักษณะสำคัญของนิยามสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

5.2) เมื่อครูได้วิเคราะห์ลักษณะสำคัญของนิยามสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ผ่านการยกตัวอย่างในข้อ 5.1 แล้ว หากต้องออกแบบแนวการสอน คุณครูจะเลือกลำดับของกระบวนการสอนเพื่อให้ได้ตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้อย่างไร จงเลือกและเรียงลำดับจากกระบวนการสอนต่อไปนี้ (สามารถเลือกกระบวนการซ้ำได้) พร้อมอธิบายและให้เหตุผลประกอบการเลือก

1) ระบุตัวอย่างที่เป็นสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ 2) ระบุตัวอย่างที่ไม่เป็นสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

3) สรุปความหมายของสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ 4) เรียงลำดับการให้ตัวอย่างตามความยากง่าย

5) นำเสนอนิยามของสัญกรณ์วิทยาศาสตร์แบบเป็นทางการ

เฉลยแนวคิดของคำตอบ

ข้อ 5.1 เนื่องจากลักษณะสำคัญของสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ คือ ค่า A เป็นจำนวนจริง และมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 แต่น้อยกว่า 10 ค่า n ที่เป็นจำนวนเต็ม และเขียนอยู่ในรูปผลคูณของ A กับ 10^n ดังนั้นตัวอย่างที่เป็นสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ต้องเลือกค่า A เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 แต่น้อยกว่า 10 ในหลากหลาย เช่น จำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม จับคู่กับค่า n ที่จะต้องประกอบด้วยจำนวนเต็มลบ ศูนย์ และจำนวนเต็มบวก ในขณะที่ตัวอย่างที่ไม่เป็นสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ต้องยกตัวอย่างค่า A เป็นจำนวนจริงที่หลากหลาย เช่น จำนวนจริงลบ ศูนย์ ทศนิยมบวกที่น้อยกว่า 1 จำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 10

ข้อ 5.2 แนวการสอนสำหรับเนื้อหานี้ขึ้นอยู่กับคำตอบและเหตุผลของครู อาจมีลักษณะดังนี้

แบบที่ 1 เป็นลักษณะที่ครูอธิบายนิยามและยกตัวอย่างประกอบ โดยมีลำดับของกระบวนการ เป็น 5) $\rightarrow$ 1) $\rightarrow$ 2) $\rightarrow$ 4) $\rightarrow$ 3) เพราะวิธีการสอนนี้ครูสามารถเน้นการอธิบายลักษณะสำคัญของนิยามและตัวอย่างให้นักเรียนเข้าใจอย่างชัดเจน

แบบที่ 2 เป็นลักษณะที่ครูให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเอง โดยลำดับของกระบวนการ เป็น 1) $\rightarrow$ 4) $\rightarrow$ 2) $\rightarrow$ 4) $\rightarrow$ 3) $\rightarrow$ 5) เพราะนิยามนี้เหมาะสำหรับการให้นักเรียนได้สังเกตและพิจารณาความสัมพันธ์จากตัวอย่างจนนำไปสู่การสรุปนิยามได้ด้วยตนเอง นักเรียนจะจดจำนิยามได้นาน

การประเมินความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและหลักสูตร (KCC) เป็นการประเมินความรู้รอบของครูคณิตศาสตร์เกี่ยวกับหลักสูตรและการเรียนการสอนทั่วไปที่สัมพันธ์กับเนื้อหาคณิตศาสตร์ สามารถประเมินได้จากการถามความรู้เกี่ยวกับหลักสูตร การเรียนการสอน แนวคิด หรือแนวโน้มทางการศึกษาคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่างคำถามที่ 6

คำถามที่ 6 ตัวชี้วัดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานในทุกเนื้อหาได้กำหนดให้ “การประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง” เป็นสิ่งที่นักเรียนต้องปฏิบัติได้ ครูคนหนึ่งจึงนำสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ออกแบบโดยใช้แนวคิดของข้อสอบ PISA (Programme for International Student Assessment) มาให้นักเรียนทำ ดังนี้

สถานการณ์ บริษัทนำเข้าโทรศัพท์เคลื่อนที่แห่งหนึ่ง ได้สำรวจยอดซื้อสินค้าแต่ละยี่ห้อ ที่มีคุณสมบัติและราคาที่แตกต่างกันของกลุ่มลูกค้าในช่วงวัยต่าง ๆ ในช่วงปลายปีเพื่อเป็นข้อมูลนำไปใช้ในการพิจารณาก่อนสั่งซื้อสินค้าในปีถัดไป พบว่า

ยี่ห้อ	คุณสมบัติ	ราคา (บาท)	จำนวนสินค้าที่ขายได้ (เครื่อง)			รวม
			ต่ำกว่า 20 ปี	20 – 30 ปี	มากกว่า 30 ปี	
A	สูง	มากกว่า 20,000	80	247	590	917
A	ปานกลาง	12,000 – 20,000	150	360	70	580
B	ปานกลาง	5,000 – 15,000	200	340	125	665
C	สูง	มากกว่า 20,000	64	150	400	614
		รวม	494	1,097	1,185	2,776

จากข้อมูลข้างต้น จงเขียนวงกลมล้อมรอบคำว่า “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” ในการลงข้อสรุปแต่ละข้อ

ข้อสรุป	ข้อสรุปต่อไปนี้ ใช่หรือไม่ใช่
1) สินค้ายี่ห้อ A เป็นที่นิยมมากกว่ายี่ห้ออื่นทุกรุ่นที่มีคุณสมบัติเดียวกัน	ใช่ / ไม่ใช่
2) ถ้าเทียบตามช่วงวัย บริษัทได้รับรายได้มากที่สุดจากยอดซื้อของกลุ่มอายุมากกว่า 30 ปี	ใช่ / ไม่ใช่
3) ทุกช่วงวัย จะซื้อสินค้าคุณสมบัติปานกลางยี่ห้อ B มากกว่ายี่ห้อ A คุณสมบัติปานกลาง เพราะราคาต่ำกว่า	ใช่ / ไม่ใช่
4) รายได้ส่วนใหญ่ของบริษัทนี้มาจากคนวัยทำงาน	ใช่ / ไม่ใช่

สถานการณ์ในชีวิตจริงข้อนี้ที่ครูนำมาใช้ ต้องการพัฒนาหรือประเมินนักเรียนด้านใดมากที่สุด

ก. ความสามารถในการทำความเข้าใจสถานการณ์หรือปัญหาในชีวิตจริง

ข. ความสามารถในแปลงสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาคณิตศาสตร์

ค. ความสามารถในการใช้หลักการและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา

ง. ความสามารถในการตีความและแปลความหมายของคำตอบ

เหตุผลในการเลือกตอบข้อคำถามข้างต้นตรงกับข้อใดต่อไปนี้

a) เพราะต้องอ่านและวิเคราะห์รายละเอียดต่าง ๆ ของสถานการณ์อย่างรอบคอบ

b) เพราะต้องนำข้อมูลจากสถานการณ์มาคิดคำนวณก่อนลงข้อสรุป

c) เพราะไม่สามารถหาข้อสรุปได้ในทันทีต้องกำหนดข้อตกลงเบื้องต้นเพิ่ม

เฉลยแนวคิดของคำตอบ

คำตอบที่ถูกต้องคือ ข้อ ง และมีเหตุผล คือ ข้อ a เพราะสถานการณ์นี้ไม่ใช่เพียงการอ่านข้อมูลเพื่อทำความเข้าใจเท่านั้น แต่ต้องการให้นักเรียนตีความข้อสรุปแต่ละข้อโดยให้เหตุผลประกอบจากการอ่านและวิเคราะห์ข้อมูลในตาราง ทั้งนี้ข้อ ค อาจเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ที่จะถูกเลือกเป็นคำตอบ เพราะคิดว่าข้อสรุป 2) นักเรียนต้องใช้การคิดคำนวณ แต่ข้อสรุป 2) ไม่สามารถคิดคำนวณได้ เพราะไม่ทราบราคาจริงของสินค้าแต่ละชนิด จึงต้องใช้การให้เหตุผลในการตีความเพื่อลงข้อสรุป

คำถามข้อนี้เป็นคำถามเพื่อประเมินความรู้รอบของครูเกี่ยวกับการสอบและกรอบการประเมินของ PISA ซึ่งเน้นการประยุกต์ใช้ความรู้และทักษะของนักเรียนอายุ 15 ปี เรื่องการอ่าน คณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ในการเผชิญกับสถานการณ์ในชีวิตจริง

บทสรุป

ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานที่เกี่ยวกับการสอน การประเมินความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนของครูคณิตศาสตร์จึงต้องใช้บริบทของการสอนมาเป็นสถานการณ์และออกแบบคำถามที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์นั้น ๆ โดยคำถามต้องสอดคล้องกับความหมาย ลักษณะสำคัญ และองค์ประกอบย่อยของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน ทั้งนี้คำถามและวิธีการตอบสามารถออกแบบได้ในหลากหลายลักษณะตามความเหมาะสม คำถามในการประเมินความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนนอกจากสามารถนำไปใช้ในการประเมินคุณภาพของครูคณิตศาสตร์แล้ว ในการผลิตครูคณิตศาสตร์สามารถนำคำถามนี้ไปปรับใช้โดยการสอดแทรกกับกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อให้นักศึกษาครูได้สะท้อนความรู้ความเข้าใจของตนเองเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน ซึ่งสามารถนำผลการประเมินไปพัฒนานักศึกษาครูและเตรียมความพร้อมก่อนฝึกปฏิบัติการสอนในสถานศึกษาได้

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

ข้อบังคับคุรุสภา ว่าด้วยมาตรฐานวิชาชีพ ฉบับที่ 4 พ.ศ. 2562. (2563, 7 พฤษภาคม). *ราชกิจจานุเบกษา*. เล่มที่ 137 ตอนพิเศษ 109 ง. หน้า 10 - 14.

ภาษาอังกฤษ

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14).

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, *59*, 389 – 407.

Chua, V. G. (2020). A meta-synthesis of studies on deficiencies and affordances in mathematical knowledge for teaching. *Araneta Research Journal* (*Indagatio*), *43*, 15 - 21.

Ding, M. (2016). Developing preservice elementary teachers' specialized content knowledge: The case of associative property. *International Journal of STEM Education*, *3*(1), 1 - 19.

Hill, H.C., Rowan, B., & Ball, D.L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371 - 406.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430 - 511.

Lai, M. Y., & Clark, J. (2018). Extending the notion of specialized content knowledge: Proposing constructs for SCK. *Mathematics Teacher Education and Development*, *20*(2), 75 - 95.

Mosvold, R., & Fauskanger, J. (2014). Teachers' beliefs about mathematical horizon content knowledge. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *9*(3), 311 – 327.

Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. In *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 9 - 25). Springer, Dordrecht.

Phelps, G., & Howell, H. (2016). Assessing mathematical knowledge for teaching: The role of teaching context. *The Mathematics Enthusiast*, *13*(1), 52 - 70 DOI: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1365