



มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์
เรื่องอสมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

Misconceptions and Mistakes in Mathematics on Inequality of
Ninth Grade Students

อักรพล พรหมตรุษ¹ และ อุเทน ปุ่มสันเทียะ²

Akkarapon Promtrud and Uthen Pumsanthia

บทคัดย่อ

การศึกษาวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ (1) ศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ และ (2) หาสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนเรื่อง อสมการ กลุ่มเป้าหมายในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนในจังหวัดพิษณุโลก จำนวน 45 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด และแบบสัมภาษณ์ วิเคราะห์ข้อมูลโดยหาความถี่ และการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา

ผลการวิจัยพบว่า (1) นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียน 2 รูปแบบ ได้แก่ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางด้านภาษา และมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางด้านทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม หรือสมบัติ และ (2) สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้แก่ การแปลความหมายของศัพท์เฉพาะผิด การไม่เข้าใจความหมายของประโยคข้อความ การเข้าใจผิดเกี่ยวกับการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน การเข้าใจผิดเกี่ยวกับการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน และพื้นฐานทางการคำนวณอยู่ในระดับต่ำ

คำสำคัญ: มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน / ข้อผิดพลาด / อสมการ

Article Info: Received 22 April, 2019; Received in revised form 23 July, 2019; Accepted 30 July, 2019

¹ นักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม อีเมล: promtrud@gmail.com

Bachelor student in Education (Mathematics) Division, Faculty of Education, Pibulsongkram Rajabhat University Email: promtrud@gmail.com

² อาจารย์ประจำหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม อีเมล: uthenpumsanthia@gmail.com

Lecturer in Mathematics Education Division, Faculty of Education, Pibulsongkram Rajabhat University Email: uthenpumsanthia@gmail.com

Abstract

The objectives of this research were 1) to study misconceptions and mistakes in mathematics in relation to inequalities, and 2) to find the cause of mathematical misconceptions on inequalities. The target group was a group of 45 students who were studying in ninth grade at a school in Phitsanulok Province. Research instruments included tests of misconceptions and mistakes in mathematics regarding inequalities and a structured interview form. Data were analyzed by finding the frequencies and analyzing the content.

The results showed that: 1) there are two forms of misconceptions and mistakes: misconceptions and mistakes of language and misconceptions and mistakes of theories, rules, formulas, definitions and properties; and 2) the causes of misconceptions include misconstruction of terminology on inequalities, misunderstanding in a sentence, misunderstanding of addition properties of inequalities, misunderstanding of multiplication property of inequalities and having weak numeracy skills.

KEYWORDS: MISCONCEPTION / MISTAKE / INEQUALITY

บทนำ

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบมีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560) ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์เช่นกัน เช่น อัมพร ม้าคนอง (2551) ได้กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาคนและการพัฒนาประเทศ ความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ช่วยให้มนุษย์เข้าใจสิ่งต่าง ๆ รอบตัว สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาในชีวิตได้อย่างมีประสิทธิภาพ และเป็นพื้นฐานของการพัฒนาความคิดเพื่อสร้างความเจริญในด้านต่าง ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่ง สิริพร ทิพย์คง (2545) ได้กล่าวว่า วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ก่อให้เกิดความเจริญก้าวหน้าด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีให้เจริญขึ้น เพราะ

การคิดค้นทางวิทยาศาสตร์ต้องอาศัยความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ด้วยเหตุนี้ คณิตศาสตร์จึงเป็นวิชาสำคัญที่ควรได้รับการศึกษา

เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญ แต่กลับพบว่าผลการทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ ขั้นพื้นฐาน (O-NET) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2557-2560 ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีคะแนนเฉลี่ยแต่ละปีเรียงตามลำดับ 29.65 32.40 29.31 และ 26.30 (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2562) ต่ำกว่าร้อยละ 50 ซึ่งสะท้อนให้เห็นถึงปัญหาคุณภาพการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ต้องได้รับการแก้ไขและพัฒนา

ปัญหาคุณภาพการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนอาจเกิดจากสาเหตุหลายประการ เช่น การเข้าใจเนื้อหาวิชาผิดพลาด เกิดข้อผิดพลาดระหว่างทำข้อสอบ หรือเกิดจากลักษณะเฉพาะของวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาที่ยากต่อการเรียนรู้ ดังที่ อัมพร ม้าคนอง (2554) ได้กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีลักษณะและธรรมชาติเฉพาะตัว ทำให้คณิตศาสตร์มีความแตกต่างจากศาสตร์อื่น ๆ คนส่วนใหญ่จะมองว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่วุ่นวายจำนวนและการคำนวณ และเข้าใจว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยาก เนื่องจากมีทฤษฎีบท กฎ สูตร และบทนิยามมากมาย รวมไปถึงไม่มีสื่อรูปธรรมที่ใช้แทนได้ชัดเจน เช่นเดียวกับ ชานนท์ จันทรา (2553) ได้กล่าวเช่นกันว่า เนื่องจากธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะเนื้อหาเป็นนามธรรมมองเห็นหรือเข้าใจได้ยาก ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สิ่งสำคัญคือ นักเรียนจะต้องมีความรู้และความเข้าใจหลักการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างดีก่อนจึงจะสามารถเรียนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไปได้

อย่างไรก็ตาม การเรียนรู้หรือการสร้างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละบุคคลมีความแตกต่างกัน ดังที่ อัมพร ม้าคนอง (2554) ได้อธิบายประเภทของความรู้ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ 1. ความรู้เชิงมโนทัศน์ (Conceptual knowledge) เป็นความรู้เกี่ยวกับความหมายและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์ หรือความเกี่ยวข้องกันของสิ่งที่ใช้อธิบายกระบวนการคณิตศาสตร์ รวมทั้งเป็นความรู้เกี่ยวกับความคิดรวบยอด ทฤษฎี ที่มา เหตุผลของขั้นตอนหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งความรู้ประเภทนี้มีความสำคัญมากต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ใน

ระดับสูงและการนำไปใช้แก้ปัญหา แต่ไม่ได้ถูกเห็นความสำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และ 2. ความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการ (Procedural knowledge) เป็นความรู้เกี่ยวกับการคำนวณ การระบุปัญหา การใช้กฎ กลวิธี และขั้นตอนในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น การคำนวณพื้นที่โดยใช้สูตร การหารยาว การหารากที่สองของจำนวน ความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการพบมากในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ส่งผลให้บางครั้งกลายเป็นความรู้เกี่ยวกับการทำงานเป็นลำดับขั้นแบบซ้ำ ๆ กล่าวคือ เป็นการทำงานที่ผู้ทำไม่เข้าใจความหมายของสิ่งที่ทำ ด้วยเหตุนี้ ครูจึงควรพยายามพัฒนาให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์มากกว่าความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการ

อย่างไรก็ตาม การพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์เป็นเรื่องยาก เนื่องจากต้องอาศัยความสามารถทางการเรียนรู้ของนักเรียน และอาศัยครูผู้สอนที่มีทักษะทางการจัดการเรียนการสอนที่สูง ส่งผลให้บางครั้งการจัด การเรียนการสอนของครูทำให้นักเรียนมีความคิดรวบยอดจากบทเรียนไม่ถูกต้องโดยที่ครูผู้สอนเองอาจไม่ได้ตั้งใจ ซึ่งมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน (Misconception) ทางคณิตศาสตร์เป็นความคิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน ไปจากสิ่งที่ถูกต้องหรือเป็นจริงในทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นจากสาเหตุหลายประการทั้งสาเหตุจากการละเลย ในเงื่อนไขของทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือบทนิยามทางคณิตศาสตร์ และสาเหตุอื่น ๆ ที่มีผลต่อความคลาดเคลื่อนในการทำความเข้าใจคณิตศาสตร์ อาทิ ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการคิดระดับสติปัญญา และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน รวมทั้งบริบทและกระบวนการจัดการเรียนรู้ สิ่งเหล่านี้ล้วนมีผลต่อการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ซึ่งเมื่อเกิดขึ้นแล้วจะมีผลกระทบต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก โดยอาจจะทำให้นักเรียนนำความรู้ไปใช้อย่างไม่ถูกต้อง หรือไม่สามารถนำความรู้ไปใช้ได้ รวมทั้งอาจทำให้ความรู้พื้นฐานไม่ดีพอที่จะเรียนรู้มโนทัศน์อื่น ๆ (อัมพร ม้าคนอง, 2557)

ดังนั้น การละเลยต่อการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนจึงเป็นสิ่งที่ไม่ถูกต้อง ครูผู้สอนควรเห็นความสำคัญที่จะศึกษาการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนเพื่อนำไปสู่การแก้ไขและการพัฒนารูปแบบการสอนที่จะช่วยพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียนให้มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง เพราะ นักเรียนที่มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ดีจะสามารถเรียนรู้และแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดี รวมทั้งมีพื้นฐานที่จะเชื่อมโยงและคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้นไปได้ดีเช่นกัน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี,

2554) แต่บางครั้งนักเรียนอาจได้รับการสอนเนื้อหาที่ไม่เพียงพอ การคิดอย่างไม่เป็นระบบ หรือความจำที่บกพร่อง จึงก่อให้เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ซึ่งเป็นปัญหาหนึ่งที่น่าไปสู่ความยากลำบากในการเรียนคณิตศาสตร์ตั้งแต่แนวคิดในระดับประถมไปจนถึงการเรียนแคลคูลัส (Allen, 2007) ซึ่งสอดคล้องกับ ไชและอัง (Chai & Ang, 1987) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนเป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้การพัฒนา มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพ และการศึกษาความคลาดเคลื่อนจะทำให้สามารถจัดหาข้อมูลซึ่งเกี่ยวข้องกับความคิดของนักเรียนเกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์และกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหา ข้อมูลเหล่านี้มีความหมายมากในการพัฒนา มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งจะต้องมีการแนะแนวทางในการช่วยให้นักเรียนหลีกเลี่ยงปัญหา และสามารถอธิบายได้ว่า เพราะสาเหตุใดนักเรียนจึงไม่มีการพัฒนา ด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

การเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนต่างจากการเกิดข้อผิดพลาด (Mistake) ซึ่งข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์อาจเกิดจากสาเหตุที่หลากหลาย ไม่ว่าจะเป็นความไม่รอบคอบ ขาดสมาธิในการทำงาน ข้อผิดพลาดไม่ได้เกิดขึ้นเป็นประจำ โดยคำตอบอาจเป็นคำตอบที่ผิดแต่นักเรียนสามารถแก้ไขหรือทำให้ถูกต้องด้วยตนเองได้ ซึ่งต่างจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดในระบบความคิด (Riccomini, 2005) ข้อผิดพลาดจึงไม่ใช่อุปสรรคต่อการเรียนรู้ของนักเรียน เพราะนักเรียนรับรู้สิ่งผิดพลาดที่เกิดขึ้นแล้วสามารถแก้ไขได้ด้วยตนเอง แต่อย่างไรก็ตาม ครูผู้สอนไม่ควรละเลยให้นักเรียนเกิดข้อผิดพลาดบ่อยครั้งจนก่อให้เกิดลักษณะนิสัยความไม่รอบคอบ

ข้อมูลการจัดการเรียนการสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนแห่งหนึ่งในจังหวัดพิษณุโลก ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2561 ผู้วิจัยพบว่า นักเรียนจำนวนมากมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการแก้สมการ ซึ่งเป็นพื้นฐานทางพีชคณิตที่สำคัญที่ใช้ในการต่อยอดความรู้ในระดับที่สูงขึ้น นอกจากนี้การแก้สมการยังมีลักษณะที่คล้ายกับการแก้สมการที่นักเรียนจะได้เรียนในภาคเรียนที่ 2 และเป็นเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญที่ใช้ในระบบจำนวนจริงในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพราะฉะนั้น หากนักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการสมการย่อมเป็นอุปสรรคต่อการต่อยอดความรู้ในระดับที่สูงขึ้น และจะเป็นอุปสรรคอย่างยิ่ง

หากผู้เรียนเกิดความสับสนระหว่างการแก้สมการและการแก้สมการ

ด้วยเหตุนี้ ผู้วิจัยจึงศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ และหาสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เพื่อเป็นข้อมูลที่จะช่วยให้ครูผู้สอนสามารถนำมาปรับใช้เพื่อหาเทคนิควิธีการสอนที่เหมาะสมแก่นักเรียน รวมถึงเป็นข้อมูลให้ครูผู้สอนทราบถึงจุดที่ตนต้องระมัดระวังก่อนจัดการเรียนรู้ในบทเรียนที่มีความสัมพันธ์เชื่อมโยงต่อเนื่องกัน หากครูผู้สอนไม่ทราบถึงลักษณะและสาเหตุของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนย่อมเตรียมการเรียนการสอนโดยคาดการณ์จุดเน้นตามความคิดของตน ซึ่งอาจมีความคลาดเคลื่อนจากความสามารถที่แท้จริงของนักเรียนได้

วัตถุประสงค์การวิจัย

- 1) เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
- 2) เพื่อหาสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

วิธีการวิจัย

กลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนแห่งหนึ่งในจังหวัดพิษณุโลก 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 45 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ประกอบด้วย 3 ตอน ได้แก่ ตอนที่ 1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดเกี่ยวกับการเขียนประโยคเกี่ยวกับจำนวนให้เป็นอสมการ มีลักษณะเป็นแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ ตอนที่ 2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดเกี่ยวกับการแก้สมการและการเขียนกราฟแสดงคำตอบ มีลักษณะเป็นแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ และตอนที่ 3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดเกี่ยวกับการใช้ความรู้เรื่องอสมการแก้โจทย์ปัญหา มีลักษณะเป็น

แบบอัตนัย จำนวน 2 ข้อ ผลการทดสอบหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (Index of consistency: IOC) อยู่ในระหว่างช่วง 0.67–1.00 เมื่อนำไปทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มเป้าหมาย จำนวน 45 คน ผลการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือวิจัย พบว่า ส่วนที่เป็นแบบเติมคำตอบมีดัชนีค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.36–0.71 ดัชนีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.36–0.71 และค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.70 ส่วนที่เป็นแบบอัตนัย มีดัชนีค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.20–0.69 ดัชนีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.36–0.78 และค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.77 ผู้วิจัยได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนของแบบวัด ดังนี้

- 1) ส่วนที่เป็นแบบเติมคำตอบ กำหนดเกณฑ์ตอบถูกต้อง 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน
- 2) ส่วนที่เป็นแบบอัตนัย กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนดังตาราง 1

ตาราง 1 เกณฑ์การให้คะแนนของแบบทดสอบแบบอัตนัย

ระดับคะแนน	เกณฑ์ในการให้คะแนนแบบทดสอบ
5	นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาทุกขั้นตอนถูกต้อง และได้คำตอบที่ถูกต้อง
4	นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาทุกขั้นตอนถูกต้อง แต่ได้คำตอบไม่ถูกต้อง
3	นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาบางขั้นตอนถูกต้อง และได้คำตอบที่ถูกต้อง
2	นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาบางขั้นตอนถูกต้อง แต่ได้คำตอบไม่ถูกต้อง
1	นักเรียนตอบเฉพาะคำตอบ
0	นักเรียนไม่ตอบเลยหรือตอบไม่ถูกต้อง

2. แบบสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง โดยสัมภาษณ์สาเหตุโน้ตทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 5 ด้าน ได้แก่ ด้านภาษาแสดงการไม่เท่ากัน ด้านการตีความภาษา ด้านการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน ด้านการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน และด้านสมบัติพื้นฐานทางการคำนวณ หลังจากนั้นให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความสอดคล้องของแบบสัมภาษณ์กับประเด็นการสัมภาษณ์ทั้ง 5 ด้าน มีค่าดัชนีความสอดคล้องอยู่ในระหว่างช่วง 0.67–1.00

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลที่ได้จากการตรวจแบบทดสอบและการสัมภาษณ์มาวิเคราะห์ ดังนี้

1. ตรวจสอบข้อสอบและสร้างตารางแสดงจำนวนของนักเรียนที่ทำแบบทดสอบผิด ถูก และไม่ทำแบบทดสอบ

2. นำแบบทดสอบที่นักเรียนตอบผิดมาวิเคราะห์เพื่อหารูปแบบของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในแต่ละด้านตามจุดประสงค์การเรียนรู้เพื่อศึกษาประเด็นย่อยที่เกิดกับนักเรียน โดยนับตามความถี่ของแต่ละรูปแบบว่ามีจำนวนเท่าไร ซึ่งไม่ได้เก็บข้อมูลความถี่โดยการแบ่งกลุ่มจำนวนนักเรียนที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เพราะนักเรียนหนึ่งคนสามารถมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้หลายรูปแบบ

3. สัมภาษณ์นักเรียนแต่ละรูปแบบ โดยคัดเลือกนักเรียนที่มีความถี่สูงสุดในแต่ละรูปแบบของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนรูปแบบละ 1 คน รวมเป็นจำนวน 5 คน เพื่อศึกษาแนวคิดและสาเหตุที่ทำให้เกิดแต่ละรูปแบบ ตลอดจนวิธีการหาคำตอบของแต่ละคน

4. สรุปสาเหตุที่นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเพื่อเสนอแนวทางแก้ไข จากนั้นนำผลการวิเคราะห์ เสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิจัยเพื่อตรวจสอบความถูกต้องและเหมาะสมของผลการวิเคราะห์ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

ผลการวิจัย

ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิจัยเพื่อตอบวัตถุประสงค์การวิจัย 2 ข้อ ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลตามจุดประสงค์การเรียนรู้ 3 ข้อ ดังนี้

- 1) นักเรียนสามารถเขียนประโยคเกี่ยวกับจำนวนให้เป็นอสมการได้
- 2) นักเรียนสามารถแก้อสมการและการเขียนกราฟแสดงคำตอบได้
- 3) นักเรียนสามารถใช้ความรู้เรื่องอสมการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการได้

ผลการศึกษา มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดตามจุดประสงค์การเรียนรู้

ข้อที่ 1

ตาราง 2 วิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดด้านการเขียนประโยคเกี่ยวกับจำนวนให้เป็นอสมการ

ข้อที่	จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบผิด			จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบถูก
	G_1	G_2	G_3	
1	1	0	2	42
2	0	1	4	40
3	12	16	1	21
4	12	2	5	27
5	8	3	0	34
รวม	33	22	12	

หมายเหตุ: G_1 หมายถึง มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านภาษาแสดงการไม่เท่ากัน

G_2 หมายถึง มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการตีความภาษา

G_3 หมายถึง ข้อผิดพลาดด้านความไม่รอบคอบทางภาษา

T_1 หมายถึง มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน

T_2 หมายถึง มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน

T_3 หมายถึง มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านสมบัติพื้นฐานทางการคำนวณ

T_4 หมายถึง ข้อผิดพลาดทางการคำนวณ

ข้อมูลจากตาราง 2 พบว่า นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางด้านภาษา 3 รูปแบบ โดยเรียงลำดับตามความถี่จากมากไปน้อย ได้แก่ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านภาษาแสดงการไม่เท่ากัน (G_1) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการตีความภาษา (G_2) และข้อผิดพลาดด้านความไม่รอบคอบทางภาษา (G_3)

ผลการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 2

ตาราง 3 วิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดในการแก้สมการและการเขียนกราฟแสดงคำตอบ

ข้อที่	จำนวนที่นักเรียนทำข้อสอบผิด				ข้อผิดพลาดจาก การเขียนกราฟ	ไม่ได้ทำหรือ ทำไม่จบข้อ	จำนวนที่นักเรียน ทำข้อสอบถูก
	มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและ ข้อผิดพลาดจากการแก้สมการ						
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄			
1	2	0	0	1	2	0	40
2	1	12	9	2	0	0	21
3	0	6	10	6	2	8	13
4	0	0	30	0	0	14	1
5	0	4	31	3	0	2	5
6	1	2	32	4	0	5	1
รวม	4	24	112	16	4	29	

ข้อมูลจากตาราง 3 พบว่า นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางด้านทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม หรือสมบัติ 5 รูปแบบ โดยเรียงลำดับตามความถี่จากมากไปน้อย ดังนี้ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านสมบัติพื้นฐานทางการคำนวณ (T_3) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน (T_2) นักเรียนมีข้อผิดพลาดทางการคำนวณ (T_4) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน (T_1) และข้อผิดพลาดจากการเขียนกราฟ

ผลการศึกษา มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 3

ตาราง 4 วิเคราะห์หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดในการใช้ความรู้เรื่องอสมการแก้โจทย์ปัญหา

ข้อที่	จำนวนที่นักเรียนทำข้อสอบผิด								จำนวนนักเรียนทำข้อสอบถูก
	G ₁	G ₂	G ₃	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	ไม่ได้ทำ/ทำไม่จบข้อ	
1	11	27	0	2	0	1	0	4	4
2	3	36	0	2	1	1	4	3	0
รวม	14	63	0*	4	1	2	4	7	

หมายเหตุ: * นักเรียนไม่มีข้อผิดพลาดด้านความไม่รอบคอบทางภาษา (G₃)

ข้อมูลในตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนมีหมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและทางด้านทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม หรือสมบัติ 6 รูปแบบ โดยเรียงลำดับตามความถี่จากมากไปน้อย ดังนี้ หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการตีความภาษา (G₂) หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านภาษาแสดงการไม่เท่ากัน (G₁) หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน (T₁) ข้อผิดพลาดทางการคำนวณ (T₄) หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านสมบัติพื้นฐานทางการคำนวณ (T₃) และหมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน (T₂)

สรุปได้ว่า นักเรียนมีหมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียน 2 รูปแบบ ดังนี้

1) หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางด้านภาษา แบ่งเป็น 3 รูปแบบ ได้แก่ หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านภาษาแสดงการไม่เท่ากัน หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการตีความภาษา และข้อผิดพลาดด้านความไม่รอบคอบทางภาษา

2) หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางด้านทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม หรือสมบัติ แบ่งเป็น 5 รูปแบบ ได้แก่ หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านสมบัติพื้นฐานทางการคำนวณ หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน ข้อผิดพลาดทางการคำนวณ หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน และข้อผิดพลาดจากการเขียนกราฟ

2. สาเหตุการเกิดหมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ

ผู้วิจัยวิเคราะห์สาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของรูปแบบ G_1 G_2 T_1 T_2 และ T_3 โดยคัดเลือกนักเรียนที่มีความถนัดสูงสุดในแต่ละรูปแบบของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนรูปแบบละ 1 คน รวมเป็นจำนวน 5 คน เพื่อศึกษาแนวคิดและสาเหตุที่ทำให้เกิดแต่ละรูปแบบ ตลอดจนวิธีการหาคำตอบของแต่ละคน ดังต่อไปนี้

ตาราง 5 วิเคราะห์สาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากการสัมภาษณ์ของนักเรียนที่เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ

รูปแบบ	การสัมภาษณ์	วิเคราะห์สาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
G_1	การสัมภาษณ์นักเรียนที่มีมโนทัศน์คลาดเคลื่อนในรูปแบบ G_1 ผู้วิจัย: เพราะเหตุใดนักเรียนจึงใช้เครื่องหมาย < แทนข้อความว่า “ไม่เกิน” นักเรียน: เพราะเข้าใจว่า ไม่เกิน หมายถึง ไม่ถึง เช่น มีส่วนสูงไม่เกินครู หมายถึง สูงน้อยกว่าครู ผู้วิจัย: นักเรียนแปลความหมายของข้อความว่า “นักเรียนมีส่วนสูงไม่เกินครู” อย่างไร นักเรียน: หมายความว่าสูงน้อยกว่า ซึ่งสูงไม่เท่าครู พิจารณาตัวอย่างการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบบ $G1$	จากการสัมภาษณ์นักเรียนพบว่า นักเรียนแปลความหมายของศัพท์เฉพาะผิด จะเห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจความหมายของคำว่า “ไม่เกิน” บิดเบือนไปว่ามีความหมายเหมือนกับคำว่า “ไม่ถึง”

3. เจ็ดเท่าของผลต่างของจำนวนจำนวนหนึ่งกับสิบหกมีค่า

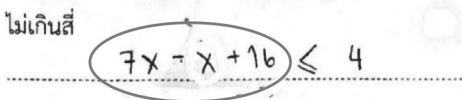
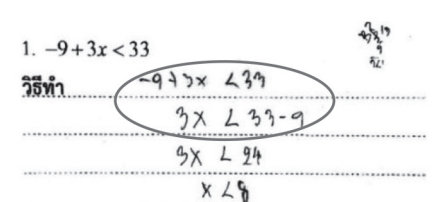
ไม่เกินสี่

$$7(x-16) \leq 4$$

ภาพ 1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านภาษาแสดงการไม่เท่ากัน

G_2	การสัมภาษณ์นักเรียนที่มีมโนทัศน์คลาดเคลื่อนในรูปแบบ G_2 ผู้วิจัย: เพราะเหตุใดนักเรียนแปลประโยคภาษา “เจ็ดเท่าของผลต่างของจำนวนจำนวนหนึ่งกับสิบหก” ได้เป็น $7x - x + 16$ นักเรียน: ตีความหมายของประโยคที่ละคำ กล่าวคือ “เจ็ดเท่า” หมายถึง $7x$ “ผลต่าง” หมายถึงลบ และ “จำนวนจำนวนหนึ่ง” หมายถึง x จึงได้	จากการสัมภาษณ์นักเรียนพบว่า นักเรียนไม่เข้าใจความหมายของประโยคข้อความ โดยแปลความหมายรวมของประโยคจากคำศัพท์ในประโยคที่ละคำศัพท์ จะเห็นว่า นักเรียนสร้างองค์ความรู้โดยใช้การจำในเชิงของรหัสภาษา เช่น
-------	--	--

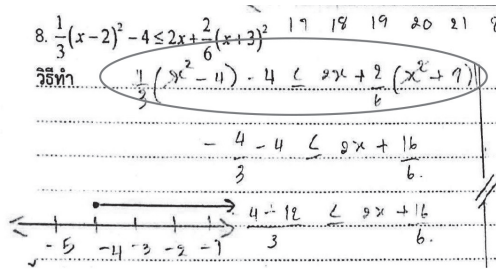
ตาราง 5 (ต่อ) วิเคราะห์สาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากการสัมภาษณ์ของนักเรียนที่เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ

รูปแบบ	การสัมภาษณ์	วิเคราะห์สาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
แบบ G_2	ว่า $7x - x$ แต่โจทย์บอกว่า “กับสิบหก” ไม่ทราบความหมายจึงคิดว่าน่าจะเอามาบวกกัน ดังนั้นจึงได้คำตอบเป็น $7x - x + 16$ พิจารณาตัวอย่างการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบบ G_2 3. เจ็ดเท่าของผลต่างของจำนวนจำนวนหนึ่งกับสิบหกมีค่าไม่เกินสี่  ภาพ 2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการตีความภาษา	นักเรียนจำว่า “ของ” หมายถึง คูณ “ผลต่าง” หมายถึง ลบ เมื่อนำความหมายของแต่ละประโยคหลักจึงทำให้ประโยคหลักมีความหมายผิด เพราะนักเรียนไม่ได้เข้าใจความหมายที่แท้จริงของประโยคนั้น ๆ
T_1	การให้สัมภาษณ์นักเรียนที่มีมโนทัศน์คลาดเคลื่อนในรูปแบบ T_1 ผู้วิจัย: จากโจทย์ $-9 + 3x < 33$ เพราะเหตุใดนักเรียนจึงแก้สมการทางฝั่งขวามือได้เป็น $33 - 9$ นักเรียน: เพราะ ต้องการทำให้ฝั่งขวาเหลือแค่ x จึงเคลื่อนย้ายมาฝั่งตรงข้าม พิจารณาตัวอย่างการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบบ T_1  ภาพ 3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน	จากการสัมภาษณ์นักเรียนพบว่า นักเรียนมีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน โดยนักเรียนเข้าใจการทำให้จำนวนหายไปจากการแก้สมการเกิดจากการเคลื่อนย้ายของจำนวน จะเห็นว่า นักเรียนเข้าใจวิธีการกำจัดจำนวน -9 หายไปด้วยวิธีการเคลื่อนย้ายไปฝั่งตรงข้าม

ตาราง 5 (ต่อ) วิเคราะห์สาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากการสัมภาษณ์ของนักเรียนที่เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ

รูปแบบ	การสัมภาษณ์	วิเคราะห์สาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
T_2 รูปแบบ T2 ผู้วิจัย: เพราะเหตุใดนักเรียนจึงไม่เปลี่ยนเครื่องหมายอสมการเมื่อคูณด้วยจำนวนลบ นักเรียน: เพราะเข้าใจว่าการคูณลบไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมายเหมือนการแก้สมการ พิจารณาตัวอย่างการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน แบบ T_2	การสัมภาษณ์นักเรียนที่มีมโนทัศน์คลาดเคลื่อนใน รูปแบบ T2 ผู้วิจัย: เพราะเหตุใดนักเรียนจึงไม่เปลี่ยนเครื่องหมายอสมการเมื่อคูณด้วยจำนวนลบ นักเรียน: เพราะเข้าใจว่าการคูณลบไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมายเหมือนการแก้สมการ พิจารณาตัวอย่างการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน แบบ T_2	จากการสัมภาษณ์นักเรียนพบว่า นักเรียนมีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน โดยเข้าใจว่าสามารถทำได้เหมือนการแก้สมการ จะเห็นว่า นักเรียนคูณจำนวนลบที่ $-x < -8$ แล้วได้เป็น $x < 8$
2. $x + 3 < \frac{3}{2}x - 1$ วิธีทำ $x + 3 < \frac{3}{2}x - 1$ $\times 2$ จะได้ $2x + 6 < 3x - 2$ $2x - 3x < -2 - 6$ $-x < -8$ $\times (-1)$ จะได้ $x < 8$ ∴ ผลของอสมการ $x - 3 < \frac{3}{2}x - 1$ คือ จำนวนจริงทุกจำนวนที่มีค่า $x < 8$		
ภาพ 4 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน		
T_3 รูปแบบ T_3 ผู้วิจัย: เพราะเหตุใด $(x - 2)^2$ จึงเท่ากับ $x^2 - 4$ นักเรียน: เพราะจากกำลังสองสมบูรณ์มันเป็นหน้ากำลังสองกับหลังกำลังสอง พิจารณาตัวอย่างการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน แบบ T_3	การสัมภาษณ์นักเรียนที่มีมโนทัศน์คลาดเคลื่อนใน รูปแบบ T_3 ผู้วิจัย: เพราะเหตุใด $(x - 2)^2$ จึงเท่ากับ $x^2 - 4$ นักเรียน: เพราะจากกำลังสองสมบูรณ์มันเป็นหน้ากำลังสองกับหลังกำลังสอง พิจารณาตัวอย่างการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน แบบ T_3	จากการสัมภาษณ์นักเรียนพบว่า นักเรียนมีพื้นฐานทางการคำนวณอยู่ในระดับต่ำ โดยเน้นที่การจดจำสูตรมากกว่าการเข้าใจที่มาของสูตรนั้น จึงส่งผลให้เกิดการจำผิดพลาด จะเห็นว่า นักเรียนมีการใช้สมบัติกำลังสองสมบูรณ์ โดยจำสูตรไม่ครบถ้วน

ตาราง 5 (ต่อ) วิเคราะห์สาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากการสัมภาษณ์ของนักเรียนที่เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ

รูปแบบ	การสัมภาษณ์	วิเคราะห์สาเหตุการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
		
	ภาพ 5 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านสมบัติพื้นฐานทางการคำนวณ	

ข้อมูลดังแสดงในตาราง 5 สามารถสรุปได้ว่า สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้แก่ การแปลความหมายของศัพท์เฉพาะผิด การไม่เข้าใจความหมายของประโยคข้อความ การเข้าใจผิดเกี่ยวกับการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน การเข้าใจผิดเกี่ยวกับการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน และพื้นฐานทางการคำนวณอยู่ในระดับต่ำ

อภิปรายผล

ข้อค้นพบจากการวิจัยสามารถนำมาอภิปรายผลได้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียน

1.1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางด้านภาษา ในการจัดเรียนการสอน ความเข้าใจทางด้านภาษาหรือการมีทักษะทางภาษาของนักเรียนเป็นพื้นฐานสำคัญ เพราะภาษาเป็นสิ่งที่ใช้ในการถ่ายทอดความรู้ ความคิด และประสบการณ์ ซึ่งในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ถือได้ว่า ทักษะทางภาษาเป็นพื้นฐานต่อการนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา จากผลการวิจัยแสดงให้เห็นว่า ภาษาเป็นปัจจัยหนึ่งส่งผลต่อการบิดเบือนทางมโนทัศน์ ซึ่งพบ 3 รูปแบบ ได้แก่ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านภาษาแสดงการไม่เท่ากัน ซึ่งมีความถี่สูงสุด โดยภาษาแสดงการไม่เท่ากันในงานวิจัยนี้ หมายถึง ประโยคหรือข้อความที่ใช้เพื่ออธิบาย

ความสัมพันธ์ของจำนวนสองจำนวนขึ้นไปที่ไม่เท่ากัน นั่นคือ ประโยคหรือข้อความที่ระบุถึงการมากกว่า น้อยกว่า ไม่มากกว่า ไม่น้อยกว่า เกิน ไม่ถึง หรือไม่เท่ากัน เป็นต้น การที่นักเรียนแปลความหมายของภาษาแสดงการไม่เท่ากันเป็นสัญลักษณ์แสดงการไม่เท่ากันได้ไม่ถูกต้อง มีสาเหตุจากนักเรียนมีความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องในภาษาแสดงการไม่เท่ากัน เช่น จำนวนจำนวนหนึ่งไม่น้อยกว่า 5 นักเรียนแปลเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ว่า $x > 5$ ซึ่งไม่ถูกต้อง โดยคำตอบที่ถูกต้องคือ $x \geq 5$ จะเห็นว่า นักเรียนเข้าใจความหมายของคำว่า “ไม่น้อยกว่า” ผิดไปว่า ไม่สามารถเท่ากับ 5 ได้ ซึ่งสอดคล้องกับ ราดาตซ์ (Radatz, 1979) ที่ได้กล่าวไว้ว่า สัญลักษณ์และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์เปรียบเสมือนการเรียนรู้ภาษาต่างประเทศ การไม่เข้าใจความหมายของข้อความทางคณิตศาสตร์มักเป็นที่มาของข้อผิดพลาดของนักเรียน ดังนั้น ภาษาแสดงการไม่เท่ากันจึงเป็นปัจจัยหนึ่งต่อการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางด้านภาษา รูปแบบถัดมา ได้แก่ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการตีความภาษา และข้อผิดพลาดด้านความไม่รอบคอบทางภาษา ซึ่งพบความถี่รองลงมาตามลำดับนั้น เป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดที่สามารถพบได้บ่อยในบทเรียนทั่วไปที่นักเรียนต้องอาศัยการฝึกฝนการอ่านตีความและความรอบคอบในการอ่าน ดังที่ โมอฟชวิตซ์ และ คณะ (Movshovitz, Zaslavsky, & Inbar, 1987) กล่าวว่า ข้อผิดพลาดด้านการตีความด้านภาษาผิด รวมไปถึงการแปลความจากภาษาพูดไปสู่ประโยคสัญลักษณ์คณิตศาสตร์หรือสมการไม่ถูกต้อง โดยการเกิดข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ อาจมีสาเหตุมาจากนักเรียนขาดการฝึกฝนในการเขียนประโยคสัญลักษณ์ หรือนำเสนอข้อมูลรูปแบบสัญลักษณ์คณิตศาสตร์รวมไปถึงการไม่เข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ หรือคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์

1.2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางด้านทฤษฎีบท กฎ สูตรบทนิยาม และสมบัติ พบ 5 รูปแบบ โดยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านสมบัติพื้นฐานทางการคำนวณ พบความถี่สูงที่สุด เนื่องจากในการแก้สมการนักเรียนจะต้องมีความรู้พื้นฐานทางการคำนวณที่ดี หากนักเรียนมีความรู้พื้นฐานดังกล่าวไม่ดีย่อมส่งผลให้การแก้ปัญหาในระดับที่สูงขึ้นเป็นไปด้วยความลำบาก เช่น ในการคำนวณหาคำตอบของสมการ $3x < -\frac{(6x+2)}{4}$ หากนักเรียนไม่เข้าใจความหมายของเครื่องหมายลบหน้าเศษส่วน $\frac{(6x+2)}{4}$ อาจส่งผลให้นักเรียนทำการกำจัดเครื่องหมายลบโดยแจกแจงไปทั้งตัวเศษและตัวส่วนเป็น $\frac{-6x-2}{-4}$ ซึ่งนั่นส่งผลให้ผลลัพธ์สุดท้ายไม่ถูกต้อง เพราะใช้สมบัติพื้นฐานทางการคำนวณผิดตั้งแต่ต้น รูปแบบ

ถัดมา ได้แก่ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน ข้อผิดพลาดทางการคำนวณ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนด้านการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน และข้อผิดพลาดจากการเขียนกราฟ เป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดที่มีความถี่รองลงมาตามลำดับ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ความเข้าใจในทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติเป็นสิ่งที่สำคัญต่อการแก้สมการ หากนักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนดังกล่าวย่อมเป็นอุปสรรคต่อการเรียนและการต่อยอดองค์ความรู้อย่างยิ่งดังที่ เกรเบอร์ (Graeber, 1992) ได้ยกตัวอย่างการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข เช่น $(x-3)(x-3)=9$ สรุปได้ว่า $(x-5)=9$ หรือ $(x-5)=9$ โดยมีสาเหตุมาจากนักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือนิยาม อย่างถ่องแท้ว่ามีเงื่อนไขอย่างไร

2. สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ อภิปรายผลได้ดังนี้

2.1 สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ด้านภาษา แสดงการไม่เท่ากัน มีสาเหตุจากนักเรียนนักเรียนแปลความหมายของศัพท์เฉพาะผิด ความเข้าใจในภาษาเป็นสิ่งสำคัญพื้นฐานต่อการต่อยอดองค์ความรู้ต่าง ๆ ฉะนั้นหากนักเรียนมีความเข้าใจความหมายของคำศัพท์ที่ใช้ในความหมายที่ไม่ถูกต้องย่อมก่อให้เกิดการตีความที่ผิด ดังคำอธิบายของ อัมพร ม้าคนอง (2536) ที่กล่าวว่า นักเรียนขาดทักษะในการตีความจากโจทย์ โจทย์ที่มีระดับความยากสูงมักจะไม่ให้ข้อมูลที่นักเรียนต้องการใช้โดยตรงแต่มักให้มาในรูปความสัมพันธ์กับตัวแปรอื่นซึ่งนักเรียนต้องมีความพยายามตีความในส่วนนี้ เพื่อให้ได้ข้อมูลตรงกับที่ต้องการใช้โดยอ่านโจทย์หลาย ๆ ครั้งให้เข้าใจ นอกจากนี้ โมอฟชวิตซ์ และ คณะ (Movshovitz et al., 1987) กล่าวไว้อีกเช่นกันว่า การตีความด้านภาษาผิดรวมไปถึงการแปลความจากภาษาพูดไปสู่ประโยคสัญลักษณ์คณิตศาสตร์หรือสมการไม่ถูกต้อง โดยการเกิดข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์มีสาเหตุมาจากนักเรียนขาดการฝึกฝนในการเขียนประโยคสัญลักษณ์ หรือนำเสนอข้อมูลรูปแบบสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ รวมไปถึงการไม่เข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

2.2 สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการตีความภาษา มีสาเหตุจากนักเรียนไม่เข้าใจความหมายของประโยคข้อความ โดยแปลความหมายรวมของประโยค

จากคำศัพท์ในประโยคทีละคำศัพท์ ซึ่งภาษาเป็นสิ่งสำคัญพื้นฐานต่อการต่อยอดองค์ความรู้ต่าง ๆ ฉะนั้นการไม่เข้าใจความหมายของประโยคข้อความที่โจทย์สื่อสารออกมาย่อมส่งผลให้ผู้เรียนดำเนินการหาคำตอบได้ไม่ถูกต้อง ดังผลวิจัยของ สุกัญญา สีสμβα (2554) ที่พบว่าสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เรื่อง อสมการ สาเหตุหนึ่งคือ นักเรียนขาดทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา นั้นแสดงให้เห็นว่า ถึงแม้ว่านักเรียนจะมีความรู้พื้นฐานเพียงพอที่จะแก้โจทย์ที่โจทย์กำหนด แต่หากนักเรียนขาดความเข้าใจโจทย์ปัญหาย่อมส่งผลให้การหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเป็นไปในทางที่ไม่ถูกต้อง

2.3 สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการใช้สมบัติการบวกของการไม่เท่ากัน มีสาเหตุจากนักเรียนเข้าใจการทำให้จำนวนหายไปจากการแก้สมการเกิดจากการเคลื่อนย้ายของจำนวน เนื่องจากธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม มีการใช้สัญลักษณ์ในการสื่อความหมายเป็นหลัก จึงเป็นเรื่องยากที่นักเรียนจะเข้าใจและจดจำรายละเอียดของคณิตศาสตร์ได้ทั้งหมด ดังที่เพียเจต์ได้แบ่งขั้นตอนของการพัฒนาการทางสติปัญญาและความคิดออกเป็น 3 ขั้น ซึ่งเด็กอายุ 11 ปีขึ้นไป อยู่ในขั้นที่ 3 ปฏิบัติการคิดด้วยนามธรรม (Formal operation) ความคิดแบบเด็ก ๆ จะสิ้นสุดลงเด็กสามารถคิดหาเหตุผลนอกเหนือไปจากสิ่งแวดล้อมที่เขาประสบได้ เด็กสามารถคิดอย่างวิทยาศาสตร์สามารถตั้งสมมติฐานและทฤษฎีได้ มีความพอใจที่จะคิดพิจารณาสิ่งที่เป็นนามธรรม มีความเห็นว่าเป็นความจริงที่ปรากฏนั้นไม่สำคัญเท่ากับความคิดถึงสิ่งที่อาจเป็นไปได้ (วิชัย ดิสสระ, 2535) ดังนั้น เมื่อนักเรียนได้รับการเห็นวิธีการแก้สมการหรือสมการโดยการละบางขั้นตอน ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากการสอนของครูผู้สอนหรือมาจากการขาดความสนใจในรายละเอียดจากการสอนของตัวนักเรียนเอง เมื่อรายละเอียดบางส่วนที่ควรทราบได้ขาดหายไปจึงส่งผลให้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ซึ่งสิ่งนี้ส่งผลให้นักเรียนสร้างข้อสรุปหรือทฤษฎีมารองรับสิ่งที่ตนได้เห็นดังกล่าว ดังที่ผู้วิจัยพบนักเรียนให้เหตุผลถึงหลักการหรือสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการว่า คือ “สมบัติการย้ายข้าง” ตัวอย่างการสร้างหลักการหรือสมบัติการย้ายข้างของนักเรียน เช่น $2x = 9$ หากต้องการกำจัดจำนวน 2 ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร x นักเรียนสร้างหลักการการย้ายข้างโดยย้ายจำนวน 2 ไปหาร 3 และทำการเปลี่ยนเครื่องหมายหน้าจำนวน 2 จึงได้คำตอบเป็น $x = \frac{3}{-2}$ โดยให้เหตุผลที่มาคือ “สมบัติการย้ายข้าง จะต้องทำการเปลี่ยนเครื่องหมายเสมอ” ซึ่งจะเห็นว่า นักเรียนสร้างหลักการหรือสมบัติมารองรับ

สิ่งที่ตนรับรู้จากการใช้สมบัติการบวก ฉะนั้นสิ่งนี้ครูผู้สอนควรตระหนักและระมัดระวัง เพื่อไม่ให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้

2.4 สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการใช้สมบัติการคูณของการไม่เท่ากัน เกิดจากนักเรียนมีความเข้าใจว่าการแก้อสมการเหมือนกับการแก้สมการ เนื่องจากลักษณะของการแก้อสมการจะมีลักษณะที่คล้ายกับการแก้สมการทั้งรูปลักษณ์และวิธีการ ดังนั้น นักเรียนซึ่งมีความเคยชินจากการแก้สมการมากกว่าจึงเกิดความสับสนและใช้สมบัติการคูณผิดความหมาย สมบัติการคูณของการไม่เท่ากันเป็นหนึ่งในสมบัติของการไม่เท่ากัน ซึ่งสมบัติของการไม่เท่ากันเป็นสมบัติที่สำคัญต่อการแก้อสมการ เพราะ เป็นสมบัติพื้นฐานใช้ในการแก้อสมการ เช่นเดียวกับสมบัติของการเท่ากันที่เป็นสมบัติพื้นฐานในการแก้สมการ สมบัติทั้ง 2 มีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน ดังนั้น หากขาดทักษะพื้นฐานที่จำเป็นดังกล่าวย่อมส่งผลให้การแก้อสมการหรือสมการผิดพลาด ดังผลวิจัยของ ทองคำ นาสมตริก, สมทรง สุวพาณิช, และ อรุณี จันท์ศิลา (2555) เรื่อง การวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ซึ่งพบว่า สาเหตุหนึ่งของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน คือ นักเรียนขาดทักษะในการใช้สมบัติของการเท่ากัน จะเห็นว่า สมบัติของการเท่ากันเป็นพื้นฐานที่ใช้ในการแก้สมการ ดังนั้น การขาดทักษะอันเป็นพื้นฐานย่อมส่งผลให้เกิดปัญหาต่อการเรียนรู้

2.5 พื้นฐานทางการคำนวณอยู่ในระดับต่ำเป็นอีกสาเหตุที่เป็นอุปสรรคต่อการเรียนอย่างยั้ง พื้นฐานทางการคำนวณในงานวิจัยนี้ หมายถึง ความรู้เดิมที่เรียนมาก่อนหน้าบทเรียนอสมการซึ่งใช้ช่วยในการคำนวณคำตอบของอสมการ การมีพื้นฐานทางการคำนวณอยู่ในระดับต่ำเป็นผลมาจากนักเรียนไม่เข้าใจที่มาของทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม หรือสมบัติ จึงส่งผลให้เกิดการจำสูตรหรือวิธีการใช้สมบัติไม่ถูกต้อง เช่น ในการแก้อสมการ $(x-4)^2 > (x+5)^2$ หากนักเรียนไม่เข้าใจที่มาของกำลังสองสมบูรณ์ว่าเกิดจากนิยามของเลขยกกำลังธรรมดา คือ $(x-4)^2 = (x-4)(x-4) = x^2 - 8x + 16$ นักเรียนอาจใช้วิธีการโดยการจำสูตร ซึ่งอาจเกิดการจำผิดพลาดได้ นั่นคือ นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการใช้กำลังสองสมบูรณ์โดยไม่เข้าใจความหมายของการยกกำลังของพหุนามนั่นเอง ทั้งนี้ โมอฟชวิตซ์ และ คณะ (Movshovitz et al., 1987) ได้ยกตัวอย่างว่า $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ เป็นการบิดเบือนทฤษฎี

บทหรือนิยาม มีสาเหตุมาจากการที่นักเรียนขาดการเน้นย้ำและฝึกฝนการใช้หลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยาม แม้บางประเด็นที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว หากไม่ได้ฝึกฝนการใช้ก็จะทำให้นักเรียนใช้หลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยามที่เฉพาะเจาะจง ผิดไปจากความเป็นจริง ซึ่งผลการวิจัยของ ทองคำ นาสมตริก, สมทรง สุวพาณิช, และ อรุณี จันทร์ศิลา (2555) เกี่ยวกับการวิเคราะห์หมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบเช่นกันว่า สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติ เกิดจากนักเรียนขาดทักษะในการใช้สมบัติของการเท่ากันในการหาคำตอบของสมการและขาดทักษะเกี่ยวกับหลักการบวกลบเศษส่วนที่มีตัวส่วนไม่เท่ากัน ซึ่งจะเห็นว่า การใช้สมบัติของการเท่ากันและหลักการบวกลบเศษส่วนเป็นพื้นฐานทางการคำนวณของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เมื่อนักเรียนขาดทักษะพื้นฐานดังกล่าว จึงก่อให้เกิดอุปสรรคต่อการเรียน ดังนั้น การที่นักเรียนมีอุปสรรคในการเรียนบทเรียนเรื่องอสมการ จึงสามารถสรุปผลเชื่อมโยงไปได้นักเรียนมีพื้นฐานในการแก้สมการอยู่ในระดับไม่พึงประสงค์ เพราะในการเรียนบทเรียนเรื่องอสมการและสมการอาศัยทักษะที่คล้ายกัน

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะเพื่อนำผลวิจัยไปใช้

- 1) เป็นแนวทางในการพัฒนาสื่อและนวัตกรรมการเรียนรู้เพื่อเน้นในเนื้อหาส่วนที่นักเรียนเกิด มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ
- 2) เป็นแนวทางให้ครูจัดการเรียนการสอนอย่างระมัดระวัง โดยเฉพาะเนื้อหาส่วนที่นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาด

ข้อเสนอแนะเพื่อนำผลวิจัยไปใช้ในการวิจัยครั้งต่อไป

- 1) การวิจัยเพื่อตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดในหน่วยการเรียนรู้อื่น ๆ
- 2) การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของรูปแบบหรือเทคนิคการสอนแบบต่าง ๆ ว่ามีผลต่อการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดมากน้อยเพียงใด

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และสาระภูมิศาสตร์ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- ชานนท์ จันทรา. (2553). *ขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับครู*. กรุงเทพฯ: อาร์ แอนด์ เอ็น ปริ้นท์.
- ทองคำ นาสมตริก, สมทรง สุวพาณิชย์, และ อรุณี จันทศิริลา. (2555). การวิเคราะห์หัตถ์โนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. *วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์*, 4(1), 75-88.
- วิชัย ดิสสระ. (2535). *การพัฒนาหลักสูตรและการสอน*. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). *ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: ครูสภาลาดพร้าว.
- สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2562). *สถิติ O-NET ย้อนหลัง*. สืบค้นจาก <http://www.niets.or.th/th/catalog/view/3865>
- สิริพร ทิพย์คง. (2545). *หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.
- สุกัญญา สีสมบา. (2554). *การวิเคราะห์หัตถ์โนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนศรีสมเด็จพิภพพัฒนาวิทยา อำเภอสหัสขันธ์ จังหวัดร้อยเอ็ด (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารธุรกิจ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม, มหาสารคาม*.
- สุรัตนา สังข์หนู, ชนศักดิ์ ป้ายเที่ยง, และ สุพร รัตนพันธ์. (2554). การพัฒนาโปรแกรมวิเคราะห์ข้อสอบอัตรณ์. *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, 21(3), 627-635.
- อัมพร ม้าคอง. (2536). *การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (รายงานการวิจัย)*. กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2551). *การพัฒนาโน้ตค้นทางคณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการได้มาซึ่งมโนทัศน์และคำถามระดับสูง* (รายงานการวิจัย). กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2554). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2557). *คณิตศาสตร์สำหรับครูระดับมัธยมศึกษา*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาษาอังกฤษ

Allen, D. G. (2007). *Student thinking*. Retrieved from http://mtc.tamu.edu/9-12/index_9-12.htm?9-12M2L1.htm

Chai, C. M., & Ang, B. H. (1987). *Identifying the reasons underlying pupil's particular errors in simple algebraic expression and equations*. Proceedings of Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education (ICMI-SEAMS) (1-3), 189-198.

Cornbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16(3), 297-334.

Graeber, A. (1992, April). *Recognizing and changing middle school students' mathematical misconceptions*. Paper presented at the 70th annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics. Nashville, TN.

Hopkins, C. D., & Antes, R. L. (1990). *Classroom measurement and evaluation* (3rd ed.). Itasca, IL: F. E. Peacock.

Movshovitz-Hader, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14.

- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-172.
- Riccomini, P. J. (2005). *Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction*. *Learning Disability Quarterly*, 28(3), 233-242.
- Rovinelli, R. J., & Hambleton, R. K. (1977). On the use of content specialists in the assessment of criterion-referenced test item validity. *Dutch Journal of Educational Research*, 2(2), 49-60.