วารสารครุศาสตร์ปริทรรศน์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย ปีที่ 12 ฉบับที่ 3 (กันยายน-ธันวาคม) 2568
Journal of Educational Review Faculty of Educational in MCU Vol. 12 No. 3 (September-December) 2025
ISSN: 2673-0030 (Online) https://so02.tci-thaijo.org/index.php/EDMCU

# การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ GUTIERREZ และ JAIME

# A STUDY OF MATTHAYOMSUKSA 3 STUDENTS' GEOMETRIC REASONING BASED ON THE CONCEPTS OF GUTIERREZ & JAIME

[1]อรัณย์ เอกชัยรุ่งโรจน์ Aran Ekachairungrojn [2]ขวัญ เพียซ้าย Khawn Piasai
[3]สุกัญญา หะยีสาและ Sukanya Hajisalah [4]เอนก จันทรจรูญ Anek Janjaroon
[1, 2, 3, 4]มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ Srinakharinwirot University, Thailand
Corresponding Author E-mail: aranguy22@gmail.com

Article Received: August 15, 2025. Revised: December 21, 2025. Accepted: December 23, 2025.

**บทคัดย่อ**

บทความวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ ในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ การวิจัยครั้งนี้เก็บรวบรวมข้อมูลจากการถอดโปรโตคอลบันทึกเสียงการสัมภาษณ์ และทำการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยการวิเคราะห์โปรโตคอลตามกรอบแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ซึ่งแบ่งเป็น 4 ด้าน ได้แก่ 1) ด้านการตระหนักรูปร่าง 2) ด้านบทนิยาม 3) ด้านการจัดหมวดหมู่ และ 4) ด้านการพิสูจน์ กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา (ฝ่ายมัธยม) จำนวน 9 คน ซึ่งแบ่งเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน และต่ำ 3 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ งานปฏิบัติ แบบสัมภาษณ์ และแบบบันทึกการสัมภาษณ์

ผลการวิจัยพบว่า 1) ด้านการตระหนักรูปร่าง มีนักเรียน 9 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน ต่ำ 3 คน) แสดงการให้เหตุผลทั้งในระดับที่ 1 และ 2 กล่าวคือ ในระดับที่ 1 นักเรียนจำแนกประเภทรูปเรขาคณิตโดยการใช้องค์ประกอบจากลักษณะภายนอกของรูป และในระดับที่ 2 นักเรียนจำแนกประเภทรูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากบทนิยามหรือหลักการทางเรขาคณิตที่เคยเรียนมา เช่น การพิจารณาจำนวนด้าน จำนวนมุม หรือการเป็นรูปปิด เป็นต้น 2) ด้านบทนิยาม ในที่นี้แบ่งเป็น 2 ด้านย่อย ได้แก่ ด้านการใช้บทนิยาม และด้านกำหนดบทนิยาม โดยด้านการใช้บทนิยาม มีนักเรียน 2 คน (กลุ่มต่ำ) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แต่ขาดการสรุปผลที่สมเหตุสมผล และมีนักเรียน 8 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสรุปผลที่สมเหตุสมผล และมีนักเรียน 1 คน (กลุ่มสูง) ที่ไม่อยู่ในระดับเลย เพราะว่าตีความโจทย์ผิด ส่วนด้านกำหนดบทนิยาม มีนักเรียน 8 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 2 กล่าวคือ นักเรียนกำหนดบทนิยามของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยาม ทฤษฎีบท การลากเส้น และการวัดความยาว มีนักเรียน 3 คน (กลุ่มสูง 2 คน ปานกลาง 1 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 กล่าวคือ นักเรียนกำหนดบทนิยามของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยาม ทฤษฎีบท การลากเส้น และ

การวัดความยาว และมีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว และมีนักเรียน 7 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 2 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสรุปผลอย่างสมเหตุสมผล 3) ด้านการจัดหมวดหมู่ มีนักเรียน 1 คน (กลุ่มต่ำ) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 1 กล่าวคือ นักเรียนจัดหมวดหมู่โดยพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูป มีนักเรียน 6 คน (กลุ่มปานกลาง 3 คน ต่ำ 3 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 2 กล่าวคือ นักเรียนอธิบายความเหมือนและความต่างของรูปโดยพิจารณาเส้นทแยงมุมที่ตนเองสร้างขึ้น จากนั้นพิจารณาความเป็นมุมฉากโดยใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และมีนักเรียน 4 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 1 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 กล่าวคือ นักเรียนอธิบายความเหมือนและความต่างของรูปโดยพิจารณาเส้นทแยงมุมที่ตนเองสร้างขึ้น และพิจารณาความเป็นมุมฉากโดยใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งแสดงการพิสูจน์เกี่ยวกับสมบัติทางเรขาคณิตแบบขั้นตอนเดียว 4) ด้านการพิสูจน์ มีนักเรียน 4 คน (กลุ่มปานกลาง 2 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ มีนักเรียน 8 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และได้ผลสรุปตามที่ต้องการ และมีนักเรียน 2 คน (กลุ่มต่ำ) ที่ไม่อยู่ในระดับเลย เพราะว่าแสดงการพิสูจน์ไม่สมเหตุสมผล

**คำสำคัญ:** การให้เหตุผลทางเรขาคณิต, แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime, รูปสามเหลี่ยม, รูปสี่เหลี่ยม

## Abstract

This research aims to investigate the geometric reasoning of Grade 9 students with high, medium, and low academic achievement in mathematics, specifically focusing on the reasoning of triangles and quadrilaterals, based on Gutierrez and Jaime's framework. A qualitative research methodology was employed, with data collected through transcribed audio recordings of interviews. The data were analyzed using protocol analysis according to Gutierrez and Jaime's framework, which categorizes reasoning into 4 aspects: 1) recognition, 2) definitions, 3) classification, and 4) proof. The target group consisted of 9 Grade 9 students from the Demonstration School of Phranakhon Si Ayutthaya Rajabhat University (Secondary Section), divided into 3 groups: 3 high-achieving, 3 medium-achieving, and 3 low-achieving students. The research instruments included practical tasks, interview forms, and interview transcripts.

The findings revealed the following: 1) Recognition: All 9 students (3 high, 3 medium, 3 low) demonstrated reasoning at Levels 1 and 2. At Level 1, students classified geometric shapes based on external characteristics. At Level 2, students classified shapes by considering definitions or geometric principles they had learned, such as the number of sides, angles, or whether the shape is closed. 2) Definitions: This aspect was divided into 2 sub-aspects: use of definitions and establishment of definitions. For the use of definitions, 2 students (low-achieving) exhibited Level 3 reasoning, proving with a single step by referring to theorems, definitions, or given conditions but lacking logical conclusions. 8 students (3 high, 3 medium,

2 low) demonstrated Level 4 reasoning, proving with multiple steps by referring to theorems, definitions, or given conditions and reaching logical conclusions. 1 student (high-achieving) did not meet any level due to misinterpreting the problem. For the establishment of definitions, 8 students (3 high, 3 medium, 2 low) showed Level 2 reasoning, defining shapes based on definitions, theorems, line construction, and measurement. 3 students (2 high, 1 medium) exhibited Level 3 reasoning, defining shapes based on definitions, theorems, line construction, and measurement with single-step proofs. 7 students (3 high, 2 medium, 2 low) demonstrated Level 4 reasoning, proving with multiple steps by referring to theorems, definitions, or given conditions and reaching logical conclusions. 3) Classification: 1 student (low-achieving) showed Level 1 reasoning, classifying shapes based on external characteristics. 6 students (3 medium, 3 low) exhibited Level 2 reasoning, explaining similarities and differences of shapes by considering self-constructed diagonals and right angles using relevant theorems. 4 students (3 high, 1 medium) demonstrated Level 3 reasoning, explaining similarities and differences of shapes by considering self-constructed diagonals and right angles using relevant theorems, along with single-step proofs of geometric properties. 4) Proof: 4 students (2 medium, 2 low) showed Level 3 reasoning, proving with a single step by referring to theorems, definitions, or given conditions. Eight students (3 high, 3 medium, 2 low) demonstrated Level 4 reasoning, proving with multiple steps by referring to theorems, definitions, or given conditions and achieving the desired conclusions. 2 students (low-achieving) did not meet any level due to illogical proofs.

**Keywords**: Geometric Reasoning, The Concepts of GUTIERREZ & JAIME, Triangle, Quadrilateral

**บทนำ**

เรขาคณิตเกิดขึ้นในอียิปต์โบราณเมื่อประมาณ 700 ปี ก่อนคริสต์ศักราช ชาวอียิปต์และชาวบาบิโลนต่างสนใจเรขาคณิตในแง่การนำไปใช้ประโยชน์ในการดำรงชีวิต เช่น การวัดพื้นที่ การสร้างที่อยู่อาศัย เป็นต้น ปัจจุบันความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กับสิ่งต่างๆ ที่อยู่รอบตัวของมนุษย์ และมีความสำคัญต่อชีวิตมนุษย์เป็นอย่างมาก เราใช้เรขาคณิตเพื่อทำความเข้าใจหรืออธิบายสิ่งต่างๆ รอบตัว เช่น ใช้เรขาคณิตในการสำรวจพื้นที่ สร้างผังเมือง สร้างถนน สิ่งก่อสร้างต่างๆ การสำรวจโลก หรือใช้เรขาคณิตในทางการค้า เช่น บรรจุภัณฑ์ทรงต่างๆ ที่ใช้บรรจุอาหาร นอกจากนี้เรขาคณิตยังช่วยพัฒนาทักษะที่สำคัญหลายประการ เช่น การคิด การให้เหตุผล การคิดสร้างสรรค์ ทักษะเชิงมิติสัมพันธ์ หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ ซึ่งทักษะเหล่านี้เป็นพื้นฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องอื่นๆ เช่น จำนวน การวัด ตลอดจน เนื้อหาคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไป อีกทั้งเรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับความรู้แขนงอื่นๆ อีกด้วย (Ferrini-Mundy, 2000; สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, 2554; อัมพร ม้าคนอง, 2557)

การคิดทางเรขาคณิตเป็นทักษะและความสามารถทางสมองของมนุษย์ที่จะคิดใคร่ครวญหาเหตุผลและลงความเห็นด้วยการพิสูจน์ การคิดทางเรขาคณิตอาจเรียกตามลักษณะการคิดเฉพาะเรื่อง เฉพาะมโนทัศน์

เช่น การคิดเชิงปริภูมิซึ่งเป็นลักษณะการคิดว่าด้วยการใช้ปัญญาญาณ (intuition) เกี่ยวกับรูปเรขาคณิต และความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตเหล่านั้น นักเรียนตั้งแต่ระดับประถมศึกษาเป็นวัยเริ่มต้นที่ควรได้รับการฝึกฝนให้เป็นผู้มีการคิดทางเรขาคณิต ถึงกระนั้นสำหรับครูคณิตศาสตร์ก็ยังมีคำถามที่เกี่ยวข้องกับการคิดทางเรขาคณิตอยู่อีกหลายประเด็น ที่พบจากปัญหาของนักเรียนขณะเรียนเรขาคณิต เช่น นักเรียนรู้จักรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในเชิงบทนิยามแต่ไม่สามารถอธิบายสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ หรือนักเรียนบางคนไม่เข้าใจว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่างจากสี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างไร ในระดับที่สูงขึ้น นักเรียนส่วนใหญ่รู้และจำได้ว่า มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้เท่ากับหนึ่งร้อยแปดสิบองศา แต่ก็ไม่สามารถพิสูจน์และให้เหตุผลได้ว่า เพราะอะไรจึงเป็นเช่นนั้น จึงมีคำพูดตามมาว่า “คิดไม่ออก” หรืออาจตอบว่า “พิสูจน์ไม่ได้” (วินัย ดำสุวรรณ, 2558) ประเด็นที่อ้างถึงนี้ได้รับความสนใจจากนักการศึกษา โดยเฉพาะนักการศึกษาชาวดัชท์สองคน ได้แก่ Pierre van Hiele และ Dina Geldof-van Hiele ซึ่งทั้งสองเป็นคู่สามีและภรรยากัน มีอาชีพเป็นครูและศึกษาปริญญาเอกอยู่ที่มหาวิทยาลัย Utrecht ประเทศเนเธอออร์แลนด์ ทั้งสองได้สร้างโมเดลชื่อว่า “แวนฮีลีโมเดล” (Van Hiele model) เพื่อใช้แก้ปัญหาที่เกิดขึ้นดังกล่าวของนักเรียน ซึ่งโมเดลดังกล่าวเป็นแนวทางให้นักเรียนรู้จักการคิดแก้ปัญหา โดยการวิเคราะห์และการสื่อความหมายคำพูดของตนเอง Van Hiele ได้เผยแพร่งานวิจัยเป็นภาษาดัชท์ ในปี ค.ศ. 1957 ในปีต่อมา Hans Freudenthal ได้นำผลงานของ Van Hiele ไปแปลเป็นภาษาอังกฤษ และในปี ค.ศ.1960 ประเทศรัสเซียได้นำแวนฮีลีโมเดล ไปใช้ในการปรับปรุงหลักสูตรวิชาเรขาคณิต และในปี ค.ศ.1976 Issaak Wirszup ได้เขียนบทความบรรยายเกี่ยวกับแวนฮีลีโมเดล โดยเขาเชื่อว่าแวนฮีลีโมเดลสามารถนำไปปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิตให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นได้ นอกจากนี้มีนักการศึกษาชาวอเมริกันได้ให้ความสนใจเกี่ยวกับแวนฮีลีโมเดลเพราะเชื่อว่าแวนฮีลีโมเดลจะช่วยแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิตได้ แวนฮีลีโมเดลเป็นการศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตโดยแบ่งออกเป็น 5 ระดับ โดยเริ่มตั้งแต่ระดับกระบวนการคิดจากง่ายไปยาก ได้แก่ ระดับ 0 หรือขั้นพื้นฐาน: การมองเห็น (Visualization) ในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกชื่อของรูปภาพที่มองเห็นแต่ไม่สามารถบอกลักษณะส่วนย่อยได้ ระดับ 1: การวิเคราะห์ (Analysis) ในระดับนี้นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตได้ชัดเจนมากขึ้นกว่าขั้นพื้นฐาน และนักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ ระดับ 2: การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deductive) ในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อยเกี่ยวกับสมบัติของรูปทรงต่างๆ ทางเรขาคณิต สามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องได้ โดยลักษณะที่พบได้บ่อยของนักเรียนในระดับนี้คือการใช้คำว่า “ผมเข้าใจ แต่ไม่สามารถอธิบายได้” ระดับ 3: การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deductive) ในระดับนี้นักเรียนสามารถเข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์คุ้นเคยกับการพิสูจน์ โดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้และอะไรคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ นักเรียนรู้จักการตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งในการคิดไปตามลำดับเหตุผล ทราบว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่เป็นจริงและเป็นไปได้อย่างไร นักเรียนอาจจะพิสูจน์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้มากกว่า 1 วิธี และระดับ 4: การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) ในระดับนี้นักเรียนสามารถคิดอย่างนามธรรม สามารถเปรียบเทียบระบบต่างๆ เช่น การเปรียบเทียบสัจพจน์ทฤษฎี และเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด (Non-Euclidean Geometry) นักเรียนสามารถจัดทฤษฎีต่างๆ เข้าเป็นระบบระเบียบ และสร้างทฤษฎีใหม่ๆ ทางเรขาคณิตได้โดยงานวิจัยของ Van Hiele ได้กล่าวถึงระดับ 4 ซึ่งเป็นระดับสุดท้ายเพียงเล็กน้อย และในหลักสูตรการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิตของระดับมัธยมศึกษานั้นจะครอบคลุมถึงระดับ 3 เท่านั้น คือ การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (สิริพร ทิพย์คง, 2532)

ในปี ค.ศ. 1981 Alan Hoffer ได้นำแวนฮีลีโมเดลมาพัฒนาเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดจากผลการสำรวจของมหาวิทยาลัย Oregon เกี่ยวกับหัวข้อคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาที่นักศึกษาชั้นปีที่ 1 ในทุกๆ

ปีการศึกษาชอบมากที่สุดและไม่ชอบมากที่สุด พบว่า วิชาที่ทุกคนไม่ชอบมากที่สุดคือวิชาเรขาคณิตและมีนักศึกษาบางคนที่เรียนได้ดีในด้านพีชคณิตแต่ไม่ชอบด้านเรขาคณิต เนื่องจากเนื้อหาเรขาคณิตเน้นการพิสูจน์ตลอดทั้งปี นักศึกษาบางส่วนขาดความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์แต่อาศัยการท่องจำ Alan Hoffer ปรับปรุงและพัฒนาแวนฮีลีโมเดลโดยแบ่งแวนฮีลีโมเดลใหม่เป็น 5 ระดับ ได้แก่ ระดับ 1: การรู้จักรูปร่าง (Recognition) ระดับนี้นักเรียนรู้จักรูปเรขาคณิตจากรูปร่างหรือลักษณะภายนอกแต่ไม่รู้จักหรือไม่สามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตนั้นได้ (ตรงกับระดับ 0 ของแวนฮีลีโมเดล) ระดับ 2: การวิเคราะห์ (Analysis) ระดับนี้นักเรียนวิเคราะห์และบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ (ตรงกับระดับ 1 ของแวนฮีลีโมเดล) ระดับ 3: การเรียงลำดับ (Ordering) ระดับนี้นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตกับบทนิยามหรือสมบัติของรูปเรขาคณิตนั้น (ตรงกับระดับ 2 ของแวนฮีลีโมเดล) ระดับ 4: การพิสูจน์ (Deduction) ระดับนี้นักเรียนเข้าใจการพิสูจน์ สัญลักษณ์ สัจพจน์ บทนิยาม ทฤษฎีบทและรูปแบบของการพิสูจน์ (ตรงกับระดับ 3 ของแวนฮีลีโมเดล) และระดับ 5: การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) ระดับนี้นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างของระบบเรขาคณิต (ตรงกับระดับ 4 ของแวนฮีลีโมเดล) และในแต่ละระดับ Alan Hoffer ได้กำหนดทักษะ 5 ทักษะที่สอดคล้องกับระดับทั้ง 5 เพื่อใช้ในการประเมินทักษะทางเรขาคณิต ได้แก่ 1) ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) 2) ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) 3) ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) 4) ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) และ 5) ทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) (Hoffer, 1981)

ต่อมาในปี ค.ศ. 1987 De Villiers ได้นำแวนฮีลีโมเดลที่ถูกพัฒนาโดย Alan Hoffer ดังที่กล่าวข้างต้นมาพัฒนาต่อ โดยเขาได้แบ่งแวนฮีลีโมเดลเป็น 5 ระดับเช่นเดียวกับ Alan Hoffer แต่ประเด็นที่แตกต่างจากของ Alan Hoffer คือ De Villiers ได้เพิ่มประเด็นเกี่ยวกับประเภทของการคิดทางเรขาคณิตซึ่งเขาได้แบ่งออกเป็น 6 ประเภท ได้แก่ 1) การรู้จักรูปร่างและสัญลักษณ์ที่ใช้แสดงรูปเรขาคณิต (Recognition and represent of figure-types) 2) ความเข้าใจและการใช้คำจำกัดความได้อย่างถูกต้อง (Use and understanding of terminology) 3) การบรรยายลักษณะของรูปเรขาคณิต (Verbal description of properties of figure-types) 4) การจำแนกประเภทตามลำดับขั้น (Hierarchical classification) 5) การพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว (One step deduction) และ 6) การพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน (Longer deduction) (Villiers, 1987) หลังจากนั้นในปี ค.ศ.1998 Gutierrez และ Jaime ได้ทำการประเมินระดับ Van Hiele ที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผล กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ถึง 8 (อายุ 11 – 14 ปี) และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึง 4 (อายุ 14 – 18 ปี) รวมทั้งหมด 309 คน โดยการวิจัยของ Gutierrez และ Jaime พิจารณาแวนฮีลีโมเดลเพียง 4 ระดับ คือ ระดับ 1 ถึง 4 (ตรงระดับ 0 ถึง 3 ตามแวนฮีลีโมเดลแบบดั้งเดิม) โดยทั้งสองคนไม่นำระดับสุดท้าย (ระดับ 5) มาใช้ในการพิจารณา เนื่องจากคำอธิบายของระดับนี้ยังขาดความชัดเจนและไม่ส่งผลต่อการเรียนรู้ของนักเรียนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา ซึ่งหัวข้อหรือประเด็นที่ Gutierrez และ Jaime นำมาใช้ในการพิจารณาเกี่ยวกับการประเมินระดับ Van Hiele ที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผล ได้แก่ ประเภทของการคิดทางเรขาคณิต 6 ประเภทของ De Villiers ดังที่กล่าวข้างต้น และทักษะทางเรขาคณิตทั้ง 5 ของ Alan Hoffer ซึ่งประกอบด้วย ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) และทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) เมื่อนำแนวคิดทั้งสอง (ประเภทของการคิดทางเรขาคณิตและทักษะทางเรขาคณิต) มาบูรณาการกันทำให้ได้หัวข้อหรือประเด็นที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตใหม่ 4 ด้าน ได้แก่ 1) การตระหนักรูปร่าง 2) บทนิยาม 3) การจัดหมวดหมู่ และ 4) การพิสูจน์ (Gutiérrez & Jaime, 1998)

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าแวนฮีลีโมเดลเป็นเรื่องที่มีความสำคัญเป็นอย่างมากทั้งในมิติที่เกี่ยวกับการช่วยการเรียนรู้และพัฒนาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน และจากข้างต้นจะเห็นถึงการพัฒนาของแวนฮีลีโมเดลของนักการศึกษาอย่างต่อเนื่องโดยเริ่มตั้งแต่ Pierre van Hiele และ Dina Geldof-van Hiele ซึ่งเป็นสามีภรรยาชาวดัชท์สองคนได้ดำเนินการสร้างและพัฒนาแวนฮีลีโมเดลในยุคแรก ๆ ต่อมา Alan Hoffer และ De Villiers ก็ได้พัฒนาและเพิ่มประเด็นต่าง ๆ ที่น่าสนใจเกี่ยวกับแวนฮีลีโมเดล จนถึงยุคของ Gutierrez และ Jaime ทั้งสองท่านได้ทำการประเมินระดับแวนฮีลีที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผล สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยสนใจศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยใช้กรอบแนวคิดการวิจัยตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยจะใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ ซึ่งผลการวิจัยในครั้งนี้จะทำให้ทราบการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ข้างต้น นอกจากนี้ผลจากการวิจัยสามารถนำไปใช้เป็นข้อมูลให้แก่บุคลากรที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อจะได้กำหนดแนวทางและวางแผนการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตให้เหมาะสมและสอดคล้องกับความสามารถของนักเรียนต่อไป

**วัตถุประสงค์การวิจัย**

เพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ในกลุ่มสูง กลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำ

**วิธีดำเนินการวิจัย**

การวิจัยครั้งนี้ได้กำหนดระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินการวิจัยออกเป็น 3 ระยะ ได้แก่

ระยะที่ 1 กำหนดกรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ศึกษาวิเคราะห์หลักสูตรและเนื้อหาคณิตศาสตร์ของสถานศึกษา ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แล้วประชุมกลุ่มย่อย เพื่อพิจารณาความเหมาะสมของกรอบแนวคิดที่ใช้ในการวิจัย

ระยะที่ 2 สร้างเครื่องที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วยงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แบบสัมภาษณ์โดยใช้งานเป็นฐาน และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ โดยนำเครื่องมือดังกล่าวเข้าการประชุมกลุ่มย่อยเพื่อพิจารณาความเหมาะสม

ระยะที่ 3 ศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ทั้ง 4 ด้าน โดยระยะนี้จะแบ่งนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำนวน 40 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วยนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ ซึ่งพิจารณาจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของสถานศึกษา จากนั้นให้นักเรียนทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แล้วหานักเรียนเพื่อเป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ กลุ่มละ 3 คน รวมทั้งหมด 9 คน ซึ่งการหานักเรียนตัวแทนของแต่ละกลุ่มดังกล่าวนั้นจะพิจารณาจากผลการทำงานปฏิบัติ (Task) ของนักเรียนและข้อมูลของนักเรียนจากครูผู้สอน รวมทั้งความยินยอมของนักเรียน แล้วจึงนำนักเรียนทั้ง 9 คนที่เป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่มไปดำเนินการสัมภาษณ์แบบใช้งานเป็นฐาน

การวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยได้นำผลที่ได้จากการทำงานปฏิบัติ (Task) เทปบันทึกการสัมภาษณ์นักเรียนเป้าหมาย จำนวน 9 คน และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ของผู้ช่วยวิจัย จำนวน 2 คน มาถอดเป็นโปรโตคอลเพื่อทำการวิเคราะห์ข้อมูล โดยใช้ผู้วิเคราะห์ข้อมูล จำนวน 3 คน ได้แก่ ผู้วิจัยและผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตรศึกษา จำนวน 2 คน ผู้วิเคราะห์ข้อมูลทั้งสามคนนำโปรโตคอลที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละข้อ เพื่อช่วยในการกำหนดระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ทั้ง 4 ด้าน ของนักเรียนเป้าหมาย หลังจากที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนได้ทำการวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนเป้าหมายทั้ง 9 คน เสร็จเรียบร้อย ผู้วิจัยจึงได้นำผลที่ได้จากการวิเคราะห์มาหาความเชื่อมั่นระหว่างผู้วิเคราะห์แต่ละคน

**สรุปผลการวิจัย**

ผลการวิจัยเรื่องการศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ที่มีผลสัมฤทธิ์ของการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ในกลุ่มสูง กลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำ โดยแบ่งออกเป็น 4 ด้าน ได้แก่ ด้านการตระหนักรูปร่าง ด้านบทนิยาม ด้านการจัดหมวดหมู่และด้านการพิสูจน์ สรุปผลได้ดังนี้

1. ด้านการตระหนักรูปร่าง นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมอยู่ในระดับ 2 โดยใช้บทนิยามและสมบัติ เช่น จำนวนด้าน มุม ความเป็นรูปปิด และลักษณะเส้น ในการพิจารณาในข้อทดสอบทั่วไป นักเรียนทุกกลุ่มตอบเหมือนกัน สำหรับรูปที่ซับซ้อน เช่น รูปสี่เหลี่ยมเว้า นักเรียนทุกกลุ่มเห็นว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยม (4 ด้าน 4 มุม แม้มีมุมป้าน) รูปสี่เหลี่ยมไขว้ นักรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางและต่ำเห็นว่าเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปจากจุดตัด แต่กลุ่มสูงมี 1 คนเห็นว่าไม่ใช่ทั้งสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมเพราะด้านและมุมเกิน รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง นักเรียนทุกกลุ่มเห็นว่าไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมเพราะมีเส้นโค้งหรือไม่ปิด และนักเรียนทุกกลุ่มแสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับ 1 โดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำบางคนเข้าใจผิดว่าเส้นตรงและส่วนของเส้นตรงคือสิ่งเดียวกัน

2. ด้านบทนิยาม แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

2.1 การใช้บทนิยาม นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ส่วนใหญ่อยู่ในระดับที่ 4 โดยการใช้สิ่งที่กำหนดให้ ทฤษฎีบท บทนิยาม และสมบัติต่างๆ ในการพิสูจน์อย่างสมเหตุสมผล แต่มีความแตกต่างในด้านความสมบูรณ์และความถูกต้องของการให้เหตุผล ดังนี้ การนำบทนิยามไปใช้เพื่อพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ นักเรียนส่วนใหญ่ของทุกกลุ่มใช้การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป และพิสูจน์ความเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน พร้อมใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้งเพื่อแสดงว่ามุมคู่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน ทำให้ด้านตรงข้ามขนานกัน อย่างไรก็ตาม นักเรียนบางคนในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงและปานกลางมีความเข้าใจผิด เช่น สันนิษฐานว่าด้านตรงข้ามขนานกันโดยไม่พิสูจน์ หรือเข้าใจว่ารูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการและคล้ายกันเป็นแบบเดียวกัน การนำบทนิยามไปใช้เพื่อพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่ นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงและปานกลางใช้วิธีหลากหลาย เช่น ลากเส้นแบ่งครึ่งมุมหรือเส้นตั้งฉากเพื่อพิสูจน์ว่ามีด้านยาวเท่ากันสองด้าน โดยใช้การพิสูจน์ความเท่ากันทุกประการแบบมุม-มุม-ด้าน หรือด้าน-มุม-ด้าน และใช้ผลรวมมุมภายในเพื่อแสดงว่ามีมุมฉากหนึ่งมุม อย่างไรก็ตาม นักเรียนบางคนในกลุ่มปานกลางและ

ต่ำมีการกำหนดที่ขาดความสมเหตุสมผล เช่น การลากเส้นตั้งฉากโดยไม่มีเหตุผลชัดเจน ส่วนนักเรียนในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำบางคนพิสูจน์ได้เพียงการมีมุมฉากแต่ไม่สามารถสรุปด้านที่ยาวเท่ากันได้ การนำบทนิยามไปใช้เพื่อพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่ นักเรียนทุกกลุ่มพิสูจน์ว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากโดยใช้ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แต่การพิสูจน์ว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันมีความแตกต่างกัน โดยนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงและปานกลางบางคนใช้การลากเส้นทแยงมุมและพิสูจน์ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม แต่ไม่สามารถแสดงว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันได้อย่างสมบูรณ์ จึงทำให้การสรุปว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขาดความสมเหตุสมผล ส่วนกลุ่มผลสัมฤทธิ์ต่ำบางคนสรุปว่าไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เนื่องจากไม่สามารถพิสูจน์ความยาวด้านที่เท่ากันได้

2.2 การกำหนดบทนิยาม นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลาง และต่ำ แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 2, 3 และ 4 โดยภาพรวม กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงมีแนวโน้มอยู่ในระดับ 3 ส่วนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางและต่ำมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 2 ซึ่งแสดงการระบุสมบัติและพิสูจน์ที่แตกต่างกันตามระดับผลสัมฤทธิ์และระดับการให้เหตุผล ดังนี้ การระบุสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว นักเรียนทุกกลุ่มระบุสมบัติเหมือนกัน เช่น เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก ด้านประชิดกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และระบุสมบัติที่แตกต่างกัน เช่น ผลรวมมุมภายใน 360 องศา เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน 1 เส้น ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงและปานกลาง นักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 โดยระบุสมบัติจากความรู้เดิมและการคาดคะเน ส่วนนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ใช้การลากเส้นและพิสูจน์สมบัติ เช่น ผลรวมมุมภายในและมุมตรงข้ามเท่ากัน 1 คู่ ส่วนนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำแสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 โดยระบุสมบัติจากบทนิยามและการลากเส้น แต่ขาดการพิสูจน์ การระบุสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว นักเรียนทุกกลุ่มระบุสมบัติเหมือนกัน เช่น มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมุมที่ฐานเท่ากัน 1 คู่ ส่วนสมบัติที่แตกต่าง เช่น มีมุมป้าน 1 มุม มีแกนสมมาตร 1 แกน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงแสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 โดยระบุสมบัติจากความรู้เดิมและการคาดคะเน ส่วนนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ใช้บทนิยามและพิสูจน์สมบัติ เช่น มุมที่ฐานเท่ากัน แต่กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางและต่ำแสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 2 โดยระบุสมบัติจากความรู้เดิม การวัดมุม และการลากเส้น โดยไม่มีการพิสูจน์สมบูรณ์ การแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากัน 3 มุม เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า นักเรียนส่วนใหญ่ในทุกกลุ่มอยู่ในระดับ 4 แต่มีวิธีการให้เหตุผลที่ต่างกัน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง นักเรียนคนที่ 1 และ 2 ใช้การลากเส้นแบ่งครึ่งมุมหรือตั้งฉากเพื่อพิสูจน์ความเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – มุม – ด้าน หรือ ด้าน – ด้าน – ด้าน ส่วนนักเรียนคนที่ 3 ใช้ทฤษฎีบทว่าด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากันย่อมเท่ากันเพื่อเชื่อมโยงกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ว่ามีมุมเท่ากัน 3 มุม กลุ่มผลสัมฤทธิ์ปานกลางและต่ำ นักเรียนบางคนใช้การลากเส้นแบ่งครึ่งด้านหรือตีเส้นขนานเพื่อพิสูจน์อย่างสมเหตุสมผล แต่บางคนขาดความสมเหตุสมผลในการลากเส้นหรือพิสูจน์โดยเฉพาะนักเรียนคนที่ 3 ในทั้งสองกลุ่มที่อาศัยบทนิยามโดยไม่พิสูจน์

3. ด้านการจัดหมวดหมู่ นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลาง และต่ำมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตอยู่ในระดับที่ 2, 3 ขั้นต้น และ 3 โดยกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงอยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น ส่วนกลุ่มผลสัมฤทธิ์ปานกลางและต่ำมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 2 การระบุสมบัติที่เหมือนและแตกต่างกันของรูปเรขาคณิตแสดงถึงการให้เหตุผลที่แตกต่างกันตามกลุ่มผลสัมฤทธิ์และระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยการระบุสมบัติที่เหมือนและแตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง

แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ขั้นต้น ใช้บทนิยาม การลากเส้น และการพับรูปเพื่อระบุสมบัติที่เหมือนกัน เช่น ผลรวมมุมภายใน 360 องศา และสมบัติที่แตกต่าง เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านยาวเท่ากัน 4 ด้านและมุมฉาก 4 มุม ส่วนรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีด้านเท่ากัน 2 คู่ กลุ่มผลสัมฤทธิ์ปานกลาง แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 ใช้การพับรูป วัดความยาวด้านและมุม และบทนิยามเพื่อระบุสมบัติ กลุ่มผลสัมฤทธิ์ต่ำ แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 ใช้ทฤษฎี วัดความยาวด้าน และพิจารณาลักษณะภายนอก โดยไม่มีการพิสูจน์สมบัติ การระบุสมบัติที่เหมือนและแตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน นักเรียนกลุ่มผลมีสัมฤทธิ์สูง แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ขั้นต้น ใช้บทนิยามและการลากเส้นเพื่อระบุสมบัติที่เหมือนกัน เช่น มีด้านขนาน 1 คู่ และสมบัติที่แตกต่าง เช่น รูปสี่เหลี่ยมคางหมูไม่มีด้านเท่ากัน ส่วนรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีด้านเท่ากัน 2 คู่ กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมีนักเรียน 2 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 ใช้การพับรูป ลากเส้นทแยงมุมและวัดความยาวด้าน ส่วนนักเรียน 1 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ขั้นต้น คือมีการพิสูจน์สมบัติเพิ่มเติมประกอบสมบัติที่ได้ นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 ใช้การลากเส้น พิจารณาลักษณะภายนอก และทฤษฎี โดยนักเรียน 1 คนแสดงการให้เหตุผลระดับ 1 ด้วยการใช้ลักษณะภายนอกเป็นหลัก การระบุสมบัติที่เหมือนและแตกต่างกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงมีนักเรียน 1 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ขั้นต้น ใช้บทนิยาม การลากเส้น และการมองภาพ ส่วนนักเรียน 2 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 มีการพิสูจน์ประกอบสมบัติ เช่น รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีมุมเท่ากัน 3 มุม ส่วนรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วมีด้านเท่ากัน 2 ด้านและมุมเท่ากัน 2 มุม กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมีนักเรียน 2 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 ใช้การพับรูปและบทนิยาม ส่วนนักเรียน 1 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ขั้นต้น มีการพิสูจน์ประกอบสมบัติเพิ่มเติม นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 ใช้ลักษณะภายนอก บทนิยาม และทฤษฎี โดยนักเรียน 1 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 ด้วยการพิจารณาลักษณะภายนอก

4. ด้านการพิสูจน์ นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลาง และต่ำ แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยส่วนใหญ่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 และบางส่วนอยู่ในระดับที่ 3 โดยการพิสูจน์ในแต่ละข้อแสดงถึงความสามารถในการใช้ทฤษฎีบท บทนิยาม และการประยุกต์ใช้ที่แตกต่างกันตามระดับผลสัมฤทธิ์ ได้แก่ การพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ใช้วิธีการหลากหลาย เช่น นักเรียนคนที่ 1 ใช้ทั้งการลากเส้นทแยงมุมและการต่อเส้นขนานกับทฤษฎีมุมแย้งและมุมตรง นักเรียนคนที่ 2 ลากเส้นตั้งฉากแบ่งรูปเป็นสามเหลี่ยม 2 รูปและสี่เหลี่ยม 1 รูป ส่วนนักเรียนคนที่ 3 ใช้การต่อด้านและทฤษฎีมุมภายนอก กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมี 2 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ใช้สูตรผลรวมมุมภายในรูป n เหลี่ยมหรือลากเส้นทแยงมุม ส่วน 1 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ใช้การต่อเส้นขนานและลากเส้นตั้งฉาก กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำมี 2 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ใช้การลากเส้นทแยงมุม และมี 1 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ใช้การต่อเส้นขนานและทฤษฎีมุมแย้ง การพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุมแบ่งเป็นสามเหลี่ยม 4 รูป โดยนักเรียนคนที่ 1 และ 2 พิสูจน์โดยแสดงความเท่ากันทุกประการแบบด้าน – มุม – ด้าน และ มุม – ด้าน – มุม ส่วนคนที่ 3 ใช้สมบัติรูปสี่เหลี่ยมด้าน

ขนาน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมี 1 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ขั้นต้น โดยพิสูจน์เพียง 1 เส้นทแยงมุม ส่วน 2 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 พิสูจน์อย่างครบถ้วนด้วยวิธีเดียวกัน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำมี 1 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 พิสูจน์ด้วยวิธี มุม – ด้าน – มุม ส่วนอีก 2 คนไม่แสดงระดับ เนื่องจากไม่พิสูจน์ความตั้งฉากของเส้นทแยงมุม การพิสูจน์ว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและทฤษฎีมุมตรง หรือลากเส้นแบ่งครึ่งมุมเพื่อพิสูจน์ความเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – มุม – ด้าน กลุ่มผลสัมฤทธิ์ปานกลาง แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ขั้นต้น ใช้การลากเส้นแบ่งครึ่งมุมหรือตั้งฉาก แต่บางวิธีขาดความสมเหตุสมผล เช่น การต่อเส้นซึ่งไม่ถือว่าเป็นเส้นตรงเดียวกันหรือมุมไม่ถูกแบ่งครึ่ง กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำมี 2 คน แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ขั้นต้น ใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือลากเส้นแบ่งครึ่งมุม แต่ 1 คนไม่แสดงระดับเนื่องจากไม่สามารถพิสูจน์ได้

**อภิปรายผลการวิจัย**

การวิจัยครั้งนี้พบผลการวิจัยสำคัญที่นำมาอภิปรายผลการวิจัยได้ดังนี้

ผลจากการวิจัยวัตถุประสงค์ที่ 1 พบว่า ในด้านการตระหนักรูปร่างนักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำกลุ่มละ 3 คน รวมทั้งหมด 9 คน อยู่ในระดับที่ 2 ทุกคนและมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบพิจารณาว่ารูปที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยมจากบทนิยามหรือหลักการของรูปที่เคยเรียนมา ซึ่งประกอบด้วยการพิจารณาจากจำนวนด้าน จำนวนมุม การเป็นรูปปิด และนักเรียนทั้ง 9 คนยังแสดงการให้เหตุในระดับที่ 1 ด้วย คือ การพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูปที่เคยเห็นและลักษณะของเส้น ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Gutiérrez and Jaime (1998) ที่กล่าวว่า นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 2 สามารถจดจำรูปร่างต่างๆ ได้โดยใช้และให้คำนิยามในการจำแนกรูป ซึ่งนักเรียนใช้สมบัติเป็นพื้นฐานของกิจกรรม ในด้านบทนิยาม แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ประเภทการใช้บทนิยาม นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ แสดงวิธีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 และ 4 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Gutiérrez and Jaime (1998) ที่กล่าวว่านักเรียนระดับมัธยมศึกษาส่วนใหญ่จะอยู่ในระดับที่ 3 หรือ 4 ซึ่งนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 มีจำนวน 2 คน ซึ่งอยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำใช้วิธีพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว โดยนำทฤษฎีนิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการให้เหตุผลหรือแสดงความเท่ากันทุกประการ แต่ยังขาดความสมเหตุสมผลในการลงข้อสรุป และนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 มีจำนวน 8 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 3 คน กลุ่มปานกลาง จำนวน 3 คน และกลุ่มต่ำจำนวน 2 คน ใช้วิธีพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยนำทฤษฎี นิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการแสดงความเท่ากันทุกประการ จนได้ข้อสรุปตามที่โจทย์ต้องการซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Villiers (1987) ที่กล่าวว่านักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 3 จะใช้วิธีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียวแต่นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 4 จะใช้วิธีการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แต่มีนักเรียน จำนวน 1 คนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงไม่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่สอดคล้องกับระดับที่กำหนด เนื่องจากมีความตีความโจทย์ผิดแล้วทำให้การให้เหตุผลมีความผิดพลาดไปจากที่โจทย์ต้องการ จำนวน 1 ข้อ ประเภทการกำหนดบทนิยาม นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ แสดงวิธีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 3 และ 4 โดยนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 2 จำนวน 8 คน ประกอบด้วยนักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 2 คน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 3 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 3 คน มีการกำหนดบทนิยามของรูปโดยพิจารณาจากนิยาม ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง การ

ลากเส้น การวัดความยาว ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Gutiérrez and Jaime (1998) ที่กล่าวว่านักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 2 ใช้นิยามเป็นพื้นฐานในการพิจารณาแต่ไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ทางตรรกะระหว่างคุณสมบัติได้ แต่นักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 จำนวน 3 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 2 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 1 คน มีการกำหนดบทนิยามของรูปโดยพิจารณาจากนิยาม ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง การลากเส้น การวัดความยาวและมีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว ส่วนนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 จำนวน 7 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 3 คน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 2 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 2 คน ใช้วิธีพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยนำทฤษฎี นิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการแสดงความเท่ากันทุกประการ จนได้ข้อสรุปตามที่โจทย์ต้องการ ในด้านการจัดหมวดหมู่ นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ แสดงวิธีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 2 และ 3 ซึ่งนักเรียนส่วนมากจะอยู่ในระดับที่ 2 และ 3 โดยนักเรียนที่แสดงวิธีการอธิบายความเหมือนกันและแตกต่างกันของสมบัติ ในระดับที่ 1 จะพิจารณาจากลักษณะภายนอก แต่นักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 2 จำนวน 6 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 3 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 3 คน พิจารณาจากการอธิบายความเหมือนกันและแตกต่างกันของสมบัติโดยพิจารณาจาก การลากเส้นเพื่อพิจารณาเส้นทแยงมุม ใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง วัดความเป็นมุมฉากของรูป และนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 จำนวน 4 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 3 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 1 คน จะมีการให้เหตุผลเพิ่มเติมจากระดับที่ 2 สอดคล้องกับงานวิจัยของ Villiers (1987) ที่กล่าวว่านักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 3 จะมีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียวเกี่ยวกับสมบัติที่ได้มา ในด้านการพิสูจน์ นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ แสดงวิธีการพิสูจน์ประกอบการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 และ 4 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Gutiérrez and Jaime (1998) ที่กล่าวว่านักเรียนมัธยมส่วนใหญ่จะอยู่ในระดับที่ 3 หรือ 4 โดยนักเรียนที่แสดงการพิสูจน์ในระดับที่ 3 จำนวน 4 คน ประกอบกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 2 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 2 คน ใช้วิธีพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว โดยนำทฤษฎี บทนิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการให้เหตุผลหรือแสดงความเท่ากันทุกประการ แต่นักเรียนที่แสดงการพิสูจน์ในระดับที่ 4 จำนวน 8 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 3 คน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางจำนวน 3 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 2 คน ใช้วิธีพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยนำทฤษฎี บทนิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการแสดงความเท่ากันทุกประการ จนได้ข้อสรุปตามที่โจทย์ต้องการ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Villiers (1987) ที่กล่าวว่านักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 3 จะใช้วิธีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียวแต่นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 4 จะใช้วิธีการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แต่มีนักเรียนจำนวน 2 คน อยู่ที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ ไม่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการพิสูจน์ที่สอดคล้องกับระดับที่กำหนด เนื่องจากนักเรียนแสดงการพิสูจน์ได้ว่า 2 รูปเท่ากันทุกประการแล้ว แต่ไม่สามารถนำไปสู่ข้อสรุปที่โจทย์ต้องการได้

**องค์ความรู้การวิจัย**

องค์ความรู้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutiérrez และ Jaime แบ่งออกเป็น 4 ด้าน ประกอบด้วย การตระหนักรูปร่าง บทนิยาม การจัดหมวดหมู่และการพิสูจน์ ดังนี้

1. การตระหนักรูปร่าง (Recognition) หมายถึง การรู้จักประเภท องค์ประกอบและสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิต โดยแบ่งออกเป็น 2 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1 คือ การพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูป หมายถึง การจำแนกประเภทของรูปเรขาคณิตโดยการใช้องค์ประกอบจากลักษณะภายนอกของรูป

ระดับที่ 2 คือ การพิจารณาจากสมบัติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การจำแนกประเภทของรูปเรขาคณิตโดยการใช้องค์ประกอบจากสมบัติทางคณิตศาสตร์ของรูป

2. บทนิยาม (Definition) หมายถึง การกำหนดสมบัติและการนำสมบัติ ข้อสรุป บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ไปใช้ในการให้เหตุผลและการสร้างข้อสรุป โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

2.1 การใช้บทนิยาม (Use of definitions) หมายถึง หมายถึง หมายถึง การพิจารณาเงื่อนไขหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แล้วนำสมบัติ ข้อสรุป บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท มาใช้ในการให้เหตุผล โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ (ซึ่งเริ่มตั้งแต่ระดับที่ 2) ประกอบด้วย

ระดับที่ 2 คือ การใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย หมายถึง การใช้สมบัติที่อยู่ในบทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่มีโครงสร้างอย่างง่าย ไม่ซับซ้อนในการให้เหตุผล

ระดับที่ 3 คือ การใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน หมายถึง การประยุกต์ใช้สมบัติที่อยู่ในบทนิยาม สัจพจน์หรือทฤษฎีบทในการให้เหตุผลกับบริบทที่ไม่คุ้นเคยหรือเป็นนามธรรม

ระดับที่ 4 คือ การแสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้ หมายถึง การแสดงความสอดคล้องกันของบทนิยาม

2.2 การกำหนดบทนิยาม (Formulation of definitions) หมายถึง การนำลักษณะภายนอก สมบัติทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการกำหนดบทนิยาม โดยแบ่งออกเป็น 4 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1 คือ การระบุลักษณะภายนอกที่เกี่ยวข้อง หมายถึง การพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูปเพื่อประกอบการกำหนดบทนิยาม

ระดับที่ 2 คือ การระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การพิจารณาจากสมบัติภายของรูปเพื่อประกอบการกำหนดบทนิยาม

ระดับที่ 3 คือ การจัดกลุ่มของสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและเพียงพอ หมายถึง การกำหนดบทนิยามจากสมบัติภายใน – นอก และสามารถนำไปใช้ได้

ระดับที่ 4 คือ การพิสูจน์ความสมมูลของบทนิยามได้ หมายถึง การแสดงความเชื่อมโยงของบทนิยามที่กำหนดกับบทนิยามอื่น ๆ

3. การจัดหมวดหมู่ (Classification) หมายถึง การจำแนกหรือจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิต โดยใช้ลักษณะภายนอกหรือสมบัติในการจัดหมวดหมู่เพื่อแสดงความเหมือนและความแตกต่างกัน โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1 คือ การจำแนกโดยลักษณะเฉพาะภายนอก หมายถึง การจำแนกความเหมือนหรือความแตกต่างกันระหว่างกลุ่มของรูปโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูป

ระดับที่ 2 คือ การจำแนกโดยสมบัติเฉพาะทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การจำแนกความเหมือนหรือความแตกต่างกันระหว่างกลุ่มของรูปโดยพิจารณาจากสมบัติเฉพาะทางคณิตศาสตร์

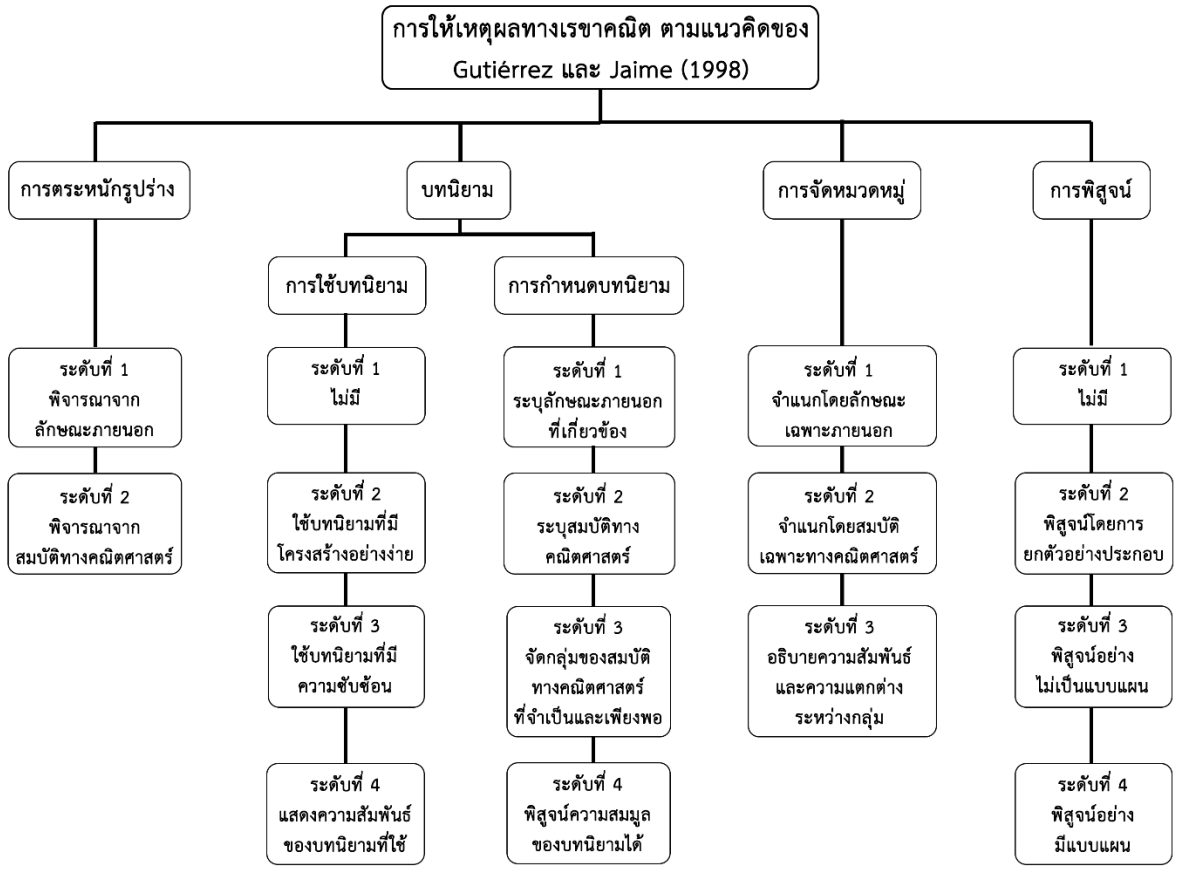
ระดับที่ 3 คือ การอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่ม หมายถึง การจำแนกและเชื่อมโยงความเหมือนหรือความแตกต่างกันระหว่างกลุ่มของรูปและจัดกลุ่มโดยการพิจารณาจากลักษณะภายนอกและสมบัติทางคณิตศาสตร์ได้

4. การพิสูจน์ (Proof) หมายถึง การใช้สมบัติ สัจพจน์ ทฤษฎีบทและบทนิยาม เพื่ออธิบายหรือแสดงให้เห็นว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ (ซึ่งเริ่มตั้งแต่ระดับที่ 2) ประกอบด้วย

ระดับที่ 2 คือ การพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ หมายถึง การให้เหตุผลประกอบข้อความที่กำหนดให้โดยโดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้หรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์แล้วยกตัวอย่างประกอบหรือการใช้สมบัติในการพิสูจน์

ระดับที่ 3 คือ การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน หมายถึง การให้เหตุผลประกอบข้อความที่กำหนดให้โดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์และทราบว่าเป็นจริงหรือเท็จ แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้เพราะไม่เคยพิสูจน์หรือการพิสูจน์อย่างไม่มีลำดับขั้นตอน

ระดับที่ 4 คือ การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน หมายถึง การให้เหตุผลประกอบข้อความที่กำหนดให้อย่างมีลำดับขั้นตอน ทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์




**ภาพที่ 1** การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutiérrez และ Jaime (1998)

## ข้อเสนอแนะการวิจัย

1. ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

1.1 ในการจัดการเรียนรู้สาระเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยเฉพาะนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำครูควรหาวิธีการสอนที่ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมายหรือเกิดความเข้าใจอย่างแท้จริงเกี่ยวกับบทนิยาม สมบัติ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม เพราะว่าสิ่งเหล่านี้เป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนจะต้อง

นำเอาไปใช้ในการจำแนกหรือจัดหมวดหมู่รูปเรขาคณิต รวมทั้งใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

1.2 ในการจัดการเรียนรู้สาระเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ครูควรให้ความสำคัญเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักเรียน เพราะว่าการให้เหตุผลของนักเรียนจะสะท้อนให้เห็นถึงความเข้าใจของเนื้อหาที่เรียนได้เป็นอย่างดี และทำให้ครูได้ข้อมูลเกี่ยวกับการเรียนรู้เรขาคณิตของนักเรียน ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อครูในการออกแบบการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตครั้งถัดไป

1.3 ในการจัดการเรียนรู้สาระเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ครูควรให้ความสำคัญ 4 ด้านต่อไปนี้ ตามที่ Gutierrez และ Jaime เสนอ ได้แก่ 1) ด้านการตระหนักรูปร่าง 2) ด้านบทนิยาม 3) ด้านการจัดหมวดหมู่ และ 4) ด้านการพิสูจน์ เพราะ 4 ด้านดังกล่าวนี้เป็นความสามารถพื้นฐานที่สำคัญของผู้เรียนที่จะไปต่อยอดเรียนวิชาเรขาคณิตระดับสูงต่อไป

1.4 ในการวัดและการประเมินผลการเรียนรู้ เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียนไม่ควรพิจารณาเพียงแค่ว่าคำตอบถูกหรือผิดจากแบบทดสอบที่นักเรียนทำเพียงอย่างเดียว ครูผู้สอนควรให้ความสำคัญเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักเรียนที่ได้มาซึ่งคำตอบ โดยใช้การประเมินที่หลากหลาย เช่น ใช้การสัมภาษณ์ ใช้การถาม - ตอบ หรือใช้การสังเกตร่วมด้วย เป็นต้น เพราะว่านักเรียนบางคนมีความรู้แต่อาจขาดความสามารถในการสื่อสารผ่านการเขียน

2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

การวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ ในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งการวิจัยนี้ได้ให้นักเรียนแสดงเหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมใน 4 ด้าน ได้แก่ 1) ด้านการตระหนักรูปร่าง 2) ด้านบทนิยาม 3) ด้านการจัดหมวดหมู่ และ 4) ด้านการพิสูจน์ โดยผลการวิจัยครั้งนี้ขึ้นอยู่กับบริบทของโรงเรียนที่ผู้วิจัยเข้าไปเก็บข้อมูล สำหรับผู้ที่สนใจจะทำวิจัยครั้งถัดไปควรทำวิจัยในบริบทอื่นๆ เพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนที่ชัดเจนยิ่งขึ้น

**เอกสารอ้างอิง**

วินัย ดำสุวรรณ. (2558). มโนทัศน์และการวิจัย ความเข้าใจคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: แดเน็กซ์อินเตอร์คอร์ปอเรชั่น.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ. (2554). การอบรมครูด้วย ระยะทางไกลสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาหลักสูตรมาตรฐานการอบรม ครูปีที่ 1. กรุงเทพมหานคร: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สิริพร ทิพย์คง. (2532). แวนฮีลีโมเดล ; ลำดับขั้นตอนการเรียนรู้เรขาคณิต. วารสารศึกษาศาสตร์ปริทัศน์, 5(3), 91 - 95.

อัมพร ม้าคนอง. (2557). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ. กรุงเทพมหานคร: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Ferrini-Mundy, J. (2000). Principles and Standards for School Mathematics: A Guide for Mathematicians. Notices of the American Mathematical Society, 47, 868-876.

Gutiérrez, A. and Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on learning problems in mathematics, 20, 27-46.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. The Mathematics Teachers, 74(1), 11–18.

Villiers, M. d. (1987). Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the van Hiele theory: Some critical comments. Internal RESUME-report.