



การสร้างความรู้ความเข้าใจในโมเดลเชิงคณิตศาสตร์

ดร.ชาญณรงค์ เขียงราษ (Dr. Channarong Heingraj)*

บทนำ

พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และแก้ไขเพิ่มเติม พ.ศ. 2545 มาตรา 22 ได้กล่าวถึงการจัดการศึกษาว่าต้องจัดให้ผู้เรียนทุกคนสามารถที่จะเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ และจะต้องถือว่าผู้เรียนสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาจะต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนได้พัฒนาตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ ดังนั้นสถานศึกษาจึงมีหน้าที่ที่จะต้องส่งเสริมและสนับสนุนให้ผู้สอนสามารถจัดบรรยากาศ สภาพแวดล้อม สื่อการเรียนรู้ที่เอื้อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้และมีความรู้ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2546) หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551) ได้ระบุถึงบทบาทของคณิตศาสตร์ว่ามีความสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ช่วยให้ผู้มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล คิดเป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ซึ่งจะช่วยให้สามารถคาดการณ์วางแผนตัดสินใจแก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้จะต้องเปิดโอกาสให้ผู้เรียนทุกคนได้เรียนรู้อย่างต่อเนื่อง และเต็มตามศักยภาพ สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) ได้กล่าวถึงการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ว่าต้องจัดให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ด้วยความเข้าใจ และสร้างความรู้ด้วยตนเองบนพื้นฐานประสบการณ์และความรู้เดิม ผู้เรียนจะเรียนได้ดีถ้าเขาสามารถควบคุมกำกับและตรวจสอบการเรียนรู้ของตนเอง การสอนจะมีประสิทธิภาพครูจะต้องสอนด้วยความเข้าใจ กล่าวคือ ครูจะต้องมีความเข้าใจในตัวของผู้เรียนว่าผู้เรียนได้เรียนรู้อะไรมาบ้าง และมีความต้องการที่จะเรียนรู้อะไร นอกจากนี้ครูจะต้อง

สร้างบรรยากาศการเรียนการสอนที่ท้าทายความสามารถของผู้เรียน และครูจะต้องมีบทบาทในการส่งเสริมและสนับสนุนให้ผู้เรียนได้เกิดการเรียนรู้

ดังนั้น ในการจัดการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพ ครูจะต้องรู้เกี่ยวกับความเข้าใจในแนวคิดหรือโมเดลทางคณิตศาสตร์ และเข้าใจในกระบวนการเรียนรู้และการสร้างความรู้ความเข้าใจในแนวคิดหรือโมเดลทางคณิตศาสตร์นั้น ๆ ของผู้เรียน

ความเข้าใจในแนวคิดหรือโมเดลทางคณิตศาสตร์

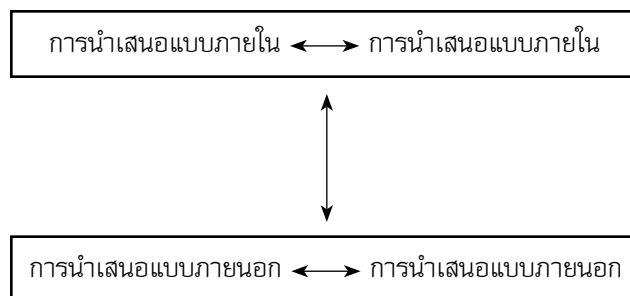
Hiebert & Carpenter (1992) ได้กล่าวถึงความรู้ความเข้าใจในแนวคิด กระบวนการ หรือโมเดลทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในตัวของผู้เรียนแต่ละคน แต่เนื่องจากแนวคิดหรือโมเดลทางคณิตศาสตร์มีลักษณะที่เป็นนามธรรมและไม่สามารถสังเกตเห็นได้ (ด้วยประสาทสัมผัสทั้ง 5 ประกอบด้วย หู ตา จมูก ลิ้น และกาย) ในการสื่อความหมายของแนวคิด กระบวนการ หรือโมเดลทางคณิตศาสตร์นั้น จำเป็นจะต้องนำเสนอโดยผ่านรูปแบบการนำเสนอแบบภายนอก (External representations) ซึ่งเป็นการนำเสนอที่สามารถสังเกตและจัดกระทำกับรูปแบบที่ถูกนำเสนอได้ ในการสร้างความรู้ความเข้าใจในแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ผู้เรียนจะใช้ความรู้หรือประสบการณ์เดิมที่มีมาสร้างความหมายกับรูปแบบการนำเสนอแบบภายนอกนั้นเพื่อสร้างข้อสรุปเป็นองค์ความรู้ใหม่ ซึ่งทำให้เกิดการเชื่อมโยงระหว่างระหว่างความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ที่ถูกสร้างขึ้น ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นการนำเสนอแบบภายใน (Internal representations) จะทำให้เกิดเครือข่ายหรือโครงสร้างทางปัญญา (Network of knowledge/Schema) เป็นผลทำให้เกิดความเข้าใจในแนวคิดทาง

* อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น



คณิตศาสตร์ขึ้น นั่นก็หมายความว่าแนวคิด กระบวนการ หรือโมเดลทางคณิตศาสตร์จะถูกเข้าใจก็ต่อเมื่อแนวคิดนั้นเป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างทางปัญญาซึ่งเกิดจากการเชื่อมโยงระหว่างแนวคิด กระบวนการ หรือโมเดลที่เกี่ยวข้องหรือมีความสัมพันธ์กัน แต่อย่างไรก็ตาม Crowley (2000) ได้ให้ข้อสังเกตว่าความมากหรือน้อยของแนวคิด กระบวนการ หรือโมเดลที่มีอยู่ในโครงสร้างทางปัญญาไม่ได้เป็นสิ่งที่บ่งบอกว่าผู้เรียนประสบความสำเร็จในการเรียนรู้หรือการแก้ปัญหา แต่ความสำเร็จนั้นจะขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของการเชื่อมโยงมากกว่า ดังที่ Hiebert & Carpenter (1992) ได้กล่าวไว้ว่าความล้มเหลวในการสร้างความเชื่อมโยงอย่างเหมาะสมและอย่างมีความหมาย อาจทำให้ผู้เรียนเกิดความยุ่งยากในการพัฒนาแนวคิด กระบวนการ หรือโมเดลทางคณิตศาสตร์ ในทางตรงกันข้ามกับการนำเสนอแบบภายใน การสื่อสารความรู้ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนให้คนอื่นได้รับรู้ นั้นจะใช้การนำเสนอแบบภายนอกเข้าช่วย ซึ่งอาจนำเสนอได้ในหลายรูปแบบ เช่น การนำเสนอความเข้าใจ

เกี่ยวกับฟังก์ชันสามารถนำเสนอในรูปของสมการ กราฟ ตาราง หรือไดอะแกรม ซึ่งมีผลทำให้เกิดการเชื่อมโยงระหว่างรูปแบบการนำเสนอแบบภายนอกแต่ละรูปแบบ จากคำกล่าวข้างต้น Goldin & Kaput (1996) ได้ให้ข้อสรุปว่าทฤษฎีเกี่ยวกับการสร้างความรู้ความเข้าใจจะถูกพัฒนาจากข้อกำหนดทางศาสตร์เชิงการเรียนรู้ (Cognitive science) 2 ลักษณะ คือ 1) การมีความสัมพันธ์ระหว่างการนำเสนอแบบภายในและการนำเสนอแบบภายนอก และ 2) การนำเสนอภายในระบบการนำเสนอแบบเดียวกันจะถูกเชื่อมโยงซึ่งกันและกัน และการเชื่อมโยงระหว่างการนำเสนอแบบภายในอาจเป็นผลจากอิทธิพลของการนำเสนอแบบภายนอก ดังภาพที่ 1 แสดงรูปแบบการเชื่อมโยงระหว่างระบบการนำเสนอที่ต่างกัน ซึ่งเรียกว่า “ปฏิสัมพันธ์ตามแนวตั้ง” (Vertical interaction) และเรียกปฏิสัมพันธ์ภายในระบบการนำเสนอแบบเดียวกันว่า “ปฏิสัมพันธ์ตามแนวนอน” (Horizontal interaction)



ภาพที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการนำเสนอ

ปฏิสัมพันธ์ตามแนวตั้ง

Goldin & Kaput (1996) ได้อธิบายความสัมพันธ์แบบสองทางในปฏิสัมพันธ์ตามแนวตั้งว่าเป็นกระบวนการเชื่อมโยงระหว่างการนำเสนอแบบภายในกับการนำเสนอแบบภายนอก ซึ่งอาจเรียกกระบวนการนี้ว่า “กระบวนการเชิงสัญลักษณ์และการแปลความหมาย” (Symbol-interpretation process) ซึ่งเป็นกระบวนการที่ผู้เรียนใช้ความรู้ความเข้าใจในโครงสร้างทางปัญญา (Schema) ที่เกี่ยวข้องมาสร้างความหมายกับรูปแบบ

ที่ถูกนำเสนอแบบภายนอก โดยอาจใช้การอ่านและการแปลความหมาย เช่น การสร้างความหมายเกี่ยวกับข้อความ กราฟ ตาราง หรือสมการ ในทางตรงกันข้ามผู้เรียนนำเสนอหรือสื่อสารแนวคิดหรือความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของตนเองออกมาในรูปแบบการนำเสนอแบบภายนอกโดยผ่านการพูด การเขียน การใช้สัญลักษณ์ เครื่องหมายต่างๆ หรือการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรม เช่น สมการซึ่งเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการบวก “สมการได้ของขวัญวัน

เกิดจากเพื่อน 3 ชิ้น และจากครอบครัว 4 ชิ้น อยากทราบว่าสมควรได้รับของขวัญทั้งหมดกี่ชิ้น” ในการแก้ปัญหา นั้นสมควรใช้ก้อนหินแทนของขวัญ โดยก้อนหิน 3 ก้อน แทนจำนวนของขวัญจากเพื่อน และก้อนหินอีก 4 ก้อน แทนจำนวนของขวัญจากครอบครัว จากนั้นเขานำเอา ก้อนหินมารวมกันแล้วใช้ความรู้เดิมเกี่ยวกับความสัมพันธ์ ระหว่างการนับและจำนวนมาสร้างคามหมายเพื่อหา จำนวนก้อนหินที่มีทั้งหมด แล้วบันทึกสถานการณ์ที่เกิดขึ้น ในสมุด เป็น “ $3+4=7$ ” เมื่อสมควรได้ทำโจทย์ในลักษณะ คล้ายกันหลายข้อ เขาสามารถพัฒนาความหมายของ การบวก โดยการนำจำนวนก้อนหินทั้งหมด (Count all) เริ่มจากการนับจำนวนก้อนหิน 3 ก้อนแรก (นับ 1, 2, 3) นับจำนวนก้อนหินอีก 4 ก้อน (นับ 1, 2, 3, 4) แล้วนำก้อน หินทั้งหมดมารวมกันแล้วนับจำนวนก้อนหินทั้งหมดอีก ครั้ง (นับ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) แล้วพัฒนามาใช้วิธีการนับ เพิ่ม (Count on) โดยนับก้อนหิน 3 ก้อนแรก (1, 2, 3) แล้วนับเพิ่มอีก 4 ก้อน (4, 5, 6, 7) และพัฒนาไปเป็นการ นับเพิ่มจากจำนวนที่มากกว่า (นับ 1, 2, 3, 4 แล้วนับเพิ่ม เป็น 5, 6, 7) จนสามารถพัฒนาวิธีการหาผลบวกโดยไม่จำเป็นต้องใช้ก้อนหินหรือวัตถุรูปธรรม โดยใช้ความรู้ หรือประสบการณ์ที่เกี่ยวกับการบวก (Known fact) ($3+4=7$ เนื่องจากผลบวกน้อยกว่า $4+4$ อยู่ 1) จะเห็นว่าสมควร ได้สร้างความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการนำเสนออย่าง น้อย 4 รูปแบบ กล่าวคือ สถานการณ์ในชีวิตจริง วัตถุ รูปธรรม สัญลักษณ์ และความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการนับ จำนวน และประสบการณ์ที่เกี่ยวกับการบวก การกระทำ ในลักษณะนี้ทำให้สมควรมีการพัฒนาความหมายของ การบวกขึ้น

ปฏิสัมพันธ์ตามแนวนอน

ปฏิสัมพันธ์ตามแนวนอนเป็นปฏิสัมพันธ์ภายใน รูปแบบการนำเสนอแบบเดียวกัน ซึ่งเป็นปฏิสัมพันธ์ ระหว่างรูปแบบการนำเสนอที่ต่างกันของแนวคิดทาง คณิตศาสตร์เดียวกันหรือระหว่างแนวคิดที่เกี่ยวข้องกัน ภายในรูปแบบการนำเสนอเดียวกัน (Hiebert & Carpenter, 1992) ในการนำเสนอแนวคิดคณิตศาสตร์ อย่างเดียวกันด้วยรูปแบบการนำเสนอแบบภายนอกที่ แตกต่างกัน ซึ่งการเชื่อมโยงระหว่างรูปแบบการนำเสนอ

แบบภายนอก หรือการนำเสนอแบบภายในของแนวคิด ทางคณิตศาสตร์เดียวกันจะมีอิทธิพลต่อกันแลกัน เช่น ในการเขียนกราฟฟังก์ชัน $f(x) = 3x+2$ เป็นการเชื่อมโยง ระหว่างการนำเสนอแบบภายนอกจากสมการมาเป็น กราฟ ในกระบวนการเขียนกราฟจะต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับ การหาจุดอันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชันเพื่อนำไปเขียน กราฟ และจะต้องรู้ว่ากราฟนั้นเป็นกราฟต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง ในทางตรงกันข้ามในการเรียนรู้เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับการเลื่อนขนานของฟังก์ชัน โดยเริ่มจาก กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ (เช่น $y = f(x) = x^2$) แล้วสังเกต พฤติกรรมของกราฟ $y = f(x-h)$ เมื่อ h เปลี่ยนแปลงค่า เพื่อพิจารณาพฤติกรรมการเลื่อนขนานตามแนวนอน และสังเกตพฤติกรรมของกราฟ $y = f(x)+k$ เมื่อ k เปลี่ยนแปลงค่า เพื่อพิจารณาพฤติกรรมการเลื่อนขนาน ตามแนวตั้ง แล้วสรุปเกี่ยวกับค่าพารามิเตอร์ h และ k ในฟังก์ชัน $y = f(x-h)+k$ ว่ามีผลอย่างไรต่อกราฟ $y = f(x)$

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบการนำเสนอแบบ ภายนอกหรือการนำเสนอแบบภายในจะเป็นผลทำให้เกิด การปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงโครงสร้างทางปัญญาซึ่ง เป็นการเปลี่ยนแปลงโดยผ่านการซึมซับ (Assimilation) หรือการปรับการรู้คิด (Accommodation) กระบวนการ ซึมซับเป็นกระบวนการที่เกิดจากการที่ความรู้หรือ ประสบการณ์เดิมมีความสัมพันธ์สอดคล้องกับความรู้ ใหม่ที่รับเข้ามา จึงเกิดการขยายโครงสร้างทางปัญญา ส่วนกระบวนการปรับการรู้คิดเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้น เนื่องจากความรู้หรือประสบการณ์เดิมที่อยู่ในโครงสร้าง ทางปัญญาไม่สอดคล้องกับความรู้ใหม่ที่ได้รับเข้ามาจึงทำให้ เกิดการปรับเปลี่ยนโครงสร้างทางปัญญาที่มีอยู่เดิมเพื่อ ให้สามารถเชื่อมโยงกับความรู้ใหม่ที่ได้รับเข้ามา (Hiebert & Carpenter, 1992)

การสร้างความรู้ความเข้าใจในแนวคิดหรือ มโนคติทางคณิตศาสตร์

Piaget (อ้างถึงใน พรณิ ข. เจนจิตร, 2545) ได้กล่าวถึงพัฒนาการทางปัญญาว่าการสร้างองค์ความรู้ เป็นกระบวนการเฉพาะของแต่ละบุคคล ผู้เรียนจะสร้าง องค์ความรู้บนพื้นฐานความรู้เดิมหรือประสบการณ์เดิม ที่มีอยู่ โดยการนำเอาความรู้หรือประสบการณ์เดิมมา



สร้างความหมายกับประสบการณ์ใหม่ที่กำลังเผชิญอยู่ ดังนั้นความหมายที่ถูกสร้างขึ้นสำหรับบุคคลแต่ละคนจะไม่เหมือนกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความรู้ะไรที่บุคคลนั้นนำมาใช้สร้างความหมายกับประสบการณ์ใหม่ซึ่งอาจใช้ความรู้ที่แตกต่างกัน แนวคิดนี้เป็นพื้นฐานของแนวคิดของกลุ่มสรรคนิยม (Constructivism) นอกจากนี้ Piaget ยังได้กล่าวถึงแนวโน้มตามธรรมชาติของมนุษย์ที่ติดตัวมาแต่กำเนิดว่ามีอยู่ 2 ลักษณะ คือการจัดระบบ (Organization) และการปรับตัว (Adaptation) โดยที่การจัดระบบเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในโดยวิธีการรวมความรู้หรือกระบวนการต่างๆที่มีความสัมพันธ์กันเชื่อมโยงกันอย่างเป็นระบบ ส่วนการปรับตัวเป็นการปรับตัวเข้ากับสิ่งแวดล้อม ซึ่งการปรับตัวนี้ประกอบด้วยกระบวนการ 2 กระบวนการ คือ กระบวนการซึมซับ และกระบวนการปรับการรู้คิด พัฒนาการทางสติปัญญาจะเกิดขึ้นเมื่อบุคคลรับเอาประสบการณ์ใหม่ที่มีความสอดคล้องกับความรู้หรือโครงสร้างทางปัญญาที่มีอยู่เดิม หรือหากความรู้เดิมไม่สอดคล้องกับประสบการณ์ใหม่จะทำให้เกิดสภาวะไม่สมดุล (Disequilibrium) ดังนั้นบุคคลจึงพยายามปรับสภาวะให้อยู่ในภาวะสมดุล (Equilibrium) โดยการปรับเปลี่ยนโครงสร้างทางปัญญาที่มีอยู่ให้สอดคล้องกับประสบการณ์ใหม่เพื่อที่จะรับเอาประสบการณ์ใหม่เข้ามาเป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างทางปัญญาต่อไป

ก่อนที่จะทำความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการสร้างมโนคติทางคณิตศาสตร์ ให้ลองพิจารณาความหมายของคำว่า “สามเหลี่ยม” กับคำว่า “ห้า” ถ้าตั้งคำถามผู้เรียนเกี่ยวกับความหมายของคำว่า “สามเหลี่ยม” ซึ่งคำตอบที่ได้จะมีความแตกต่างจากคำตอบของคำถามเกี่ยวกับความหมายของคำว่า “ห้า”

คำตอบจากคำถามแรกอาจจะเป็น

“รูปเรขาคณิตที่ประกอบด้วยด้านสามด้าน” หรือ

“รูปเรขาคณิตที่สร้างจากส่วนของเส้นตรงสามเส้น” หรือ

“รูปเรขาคณิตที่ประกอบด้วยมุมสามมุม” หรือ

“รูปเรขาคณิตที่ประกอบด้วยด้านสามด้านและมุมสามมุม”

คำตอบแต่ละคำตอบที่ได้เป็นการอธิบายเกี่ยวกับลักษณะเฉพาะของรูปสามเหลี่ยมที่ผู้เรียนได้สังเกตเห็นจากรูปหรือวัตถุที่เป็นรูปสามเหลี่ยม

ส่วนคำตอบของคำถามที่สองจะแตกต่างจากคำตอบของคำถามแรก โดยคำตอบอาจจะเป็น

“ห้าเป็นจำนวน ๆ หนึ่ง สามารถเขียนแทนด้วย 5” หรือ

“แอปเปิลห้าผล หรือเก้าอี้ห้าตัว”

นอกจากนี้อาจจะได้คำตอบที่เกี่ยวข้องกับสมบัติทางเลขคณิต เช่น

“ห้าเป็นจำนวนคี่” หรือ

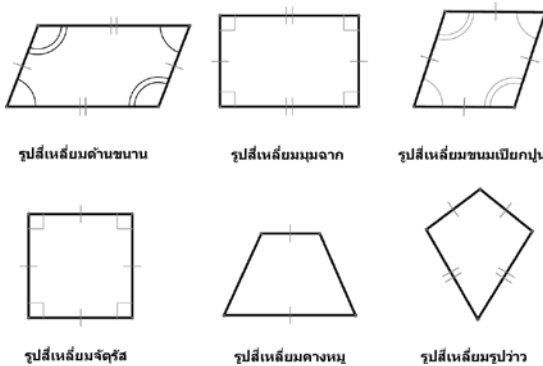
“ห้าเป็นจำนวนที่อยู่ระหว่างสี่กับหก” หรือ

“ห้าเป็นจำนวนที่มากกว่าสี่อยู่หนึ่ง”

จากคำตอบข้างต้นจะมีความแตกต่างระหว่างความหมายของ “สามเหลี่ยม” กับความหมายของ “ห้า” โดยที่ “สามเหลี่ยม” เป็นวัตถุที่สามารถสังเกตเห็นรูปร่างและสามารถอธิบายในเทอมของสมบัติเฉพาะ (ประกอบด้วยด้านสามด้าน) ส่วน “ห้า” จะถูกนำเสนอในรูปของวัตถุรูปธรรมจำนวนห้าชิ้น วัตถุทั้งห้าชิ้นจะถูกนับ “หนึ่ง สอง สาม สี่ ห้า” คำสุดท้ายของการนับวัตถุชิ้นสุดท้าย “ห้า” จะแทนจำนวนวัตถุทั้งหมด จะเห็นได้ว่าความหมายของ “ห้า” จะมีความแตกต่างจาก “สามเหลี่ยม” ตรงที่มันเกี่ยวข้องกับวัตถุ ส่วนจำนวน “ห้า” นั้นเป็นผลมาจากกระบวนการ (Process) ในที่นี้ คือกระบวนการนับ

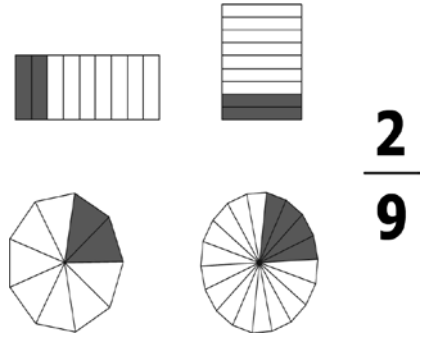
ดังนั้นทั้ง Piaget (1992) และ Gray & Tall (2007) ได้จำแนกมโนคติทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 แบบ คือ มโนคติทางคณิตศาสตร์ที่สร้างจากการรับรู้ (Perceptions) เกี่ยวกับวัตถุโดยผ่านประสาทสัมผัสทั้งห้า ซึ่งประกอบด้วย หู ตา จมูก ลิ้น และกาย ผู้เรียนจะวิเคราะห์สมบัติร่วมของวัตถุและพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสมบัตินั้น ๆ แล้วสรุปในรูปของภาษาพูดหรือภาษาเขียน (Definitions) ข้อสรุปที่ได้จะมีความแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับผู้สังเกตแต่ละคนจะใช้ความรู้หรือประสบการณ์เดิมอะไรมาสร้างความหมายกับสิ่งที่ได้รับรู้ Piaget เรียกมโนคติในลักษณะนี้ว่า Empirical abstraction (Dubinsky, 1992) หรือ Conceptual embodiment (Gray & Tall, 2007) เช่น การเรียนรู้เกี่ยวกับวงรี (Class) ของรูปสี่เหลี่ยม โดยครูกำหนดรูปสี่เหลี่ยมที่มีลักษณะต่าง

ต่างกัน ดังภาพที่ 2 ให้นักเรียนสังเกตว่ามีสี่เหลี่ยมรูปใดที่มีสมบัติหรือลักษณะที่เหมือนกัน ซึ่งจะเห็นว่าสี่เหลี่ยมด้านขนาน สี่เหลี่ยมมุมฉาก สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีลักษณะเหมือนกัน คือ มีด้านตรงข้ามกันขนานกัน 2 คู่ ดังนั้น สี่เหลี่ยมมุมฉาก สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะอยู่ในวงศ์ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสี่เหลี่ยมมุมฉากและสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะสรุปได้ว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเท่ากันทั้งสี่ด้าน ในทำนองเดียวกันจะสรุปได้ว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก ส่วนสี่เหลี่ยมคางหมูและสี่เหลี่ยมรูปว่าวไม่มีลักษณะร่วมกับสี่เหลี่ยมชนิดอื่น



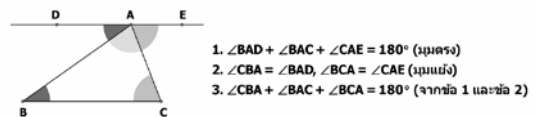
ภาพที่ 2 แสดงชนิดของรูปสี่เหลี่ยม

2. มโนคติทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการรับรู้ผลของการจัดกระทำกับวัตถุโดยผ่านประสาทสัมผัสทั้งห้า แล้วพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลของการจัดกระทำกับวัตถุและสัญลักษณ์ที่ใช้แทนผลของการจัดกระทำนั้น Piaget เรียกมโนคติในลักษณะนี้ว่า Pseudo-empirical abstraction (Dubinsky, 1992) หรือ Symbolic proceptual (Gray & Tall, 2007) เช่น การสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของเศษส่วน จะใช้การแบ่งวัตถุออกเป็นส่วน ๆ ให้มีขนาดเท่ากัน ส่วนที่ถูกเลือกจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ของเศษส่วน ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3 แสดงความหมายของเศษส่วน

มโนคติทางคณิตศาสตร์ที่สร้างจากการใช้ความรู้ ความเข้าใจ (Reflection) ซึ่งอาจจะเป็นมโนคติที่สร้างในแบบที่ 1 หรือที่ 2 หรือมโนคติที่ได้จากการสร้างในแบบที่ 3 มาสร้างความหมายกับกิจกรรมที่กระทำเพื่อสร้างมโนคติทางคณิตศาสตร์ใหม่ในลำดับที่สูงขึ้น เช่น นักเรียนใช้สมบัติของมุมตรงและสมบัติเส้นขนานเกี่ยวกับมุมแย้งมาใช้พิสูจน์สมบัติของผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม (ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะเท่ากับ 180°) ดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 แสดงมโนคติเกี่ยวกับผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม

ในการพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์อาจใช้การสร้างมโนคติแบบใดแบบหนึ่ง หรือใช้ 2 แบบ หรืออาจใช้ทั้ง 3 แบบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

การสร้างมโนคติทางเรขาคณิต

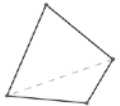
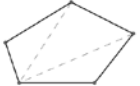
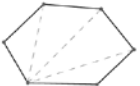
ในการหาผลบวกของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยม โดยใช้ความรู้เดิมเกี่ยวกับผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีค่าเท่ากับ 180°

เริ่มจากการจํานวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากเส้นทแยงมุมที่เชื่อมระหว่างจุดยอดมุมจุดหนึ่งไปยังจุดยอดอื่น ๆ ของรูปสี่เหลี่ยม ห้าเหลี่ยม และหกเหลี่ยมตามลำดับ แล้วหาผลบวกของมุมภายในของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ



เติมในตารางให้สมบูรณ์ (ดังตารางข้างล่าง) แล้วพิจารณาแบบรูป (Pattern) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสามเหลี่ยมกับผลบวกของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมต่าง ๆ จะเห็นว่า “ผลบวกของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมเท่ากับจำนวนรูปสามเหลี่ยมผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด” ดังนั้น จะได้ข้อสรุปว่า

$$\text{ผลบวกของมุมภายในของรูป } n \text{ เหลี่ยมใด ๆ} \\ = (n-2) \times 180^\circ = 360^\circ$$

รูปหลายเหลี่ยม	จำนวนสามเหลี่ยม	ผลบวกของมุมภายใน
	1	180°
	2	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
	3	$3 \times 180^\circ = 540^\circ$
	4	$4 \times 180^\circ = 720^\circ$

การสร้างมโนคติทางเลขคณิต

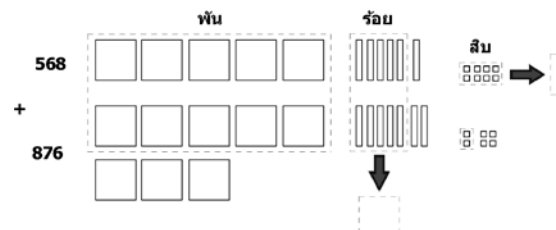
1. การบวกจำนวนสองจำนวนที่มีผลบวกไม่เกิน 9

การพัฒนาโมโนติเกี่ยวกับการบวก เช่น “3+5” ผู้เรียนจะหาผลบวกโดยการนับวัตถุโดยการนำเอาวัตถุ 3 ชิ้นมานับรวมกับวัตถุอีก 5 ชิ้น อาจจะนับวัตถุในกลุ่มที่ 1, “1, 2, 3” นับวัตถุในกลุ่มที่ 2, “1, 2, 3, 4, 5” แล้วนำเอาวัตถุทั้งสองกลุ่มมานับรวมกัน “1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8” จะได้ผลบวกเท่ากับ 8 (Count-all) หรือ นับวัตถุในกลุ่มที่ 1 ก่อน “1, 2, 3” แล้วนับวัตถุในกลุ่มที่ 2 เป็น “4, 5, 6, 7, 8” ได้ผลบวกเท่ากับ 8 (Count-both) หรือใช้การนับเพิ่มจาก 3 เป็น “4, 5, 6, 7, 8” ได้ผลบวกเท่ากับ

8 (Count-on) หรือใช้การนับเพิ่มจากจำนวนที่มาก คือ 5 เป็น “6, 7, 8” ได้ผลบวกเท่ากับ 8 (Count-on from large number) จนกระทั่งสามารถใช้ความรู้เดิมเกี่ยวกับการบวกมาใช้ กล่าวคือ “ผลบวกมีค่าน้อยกว่า 10 อยู่ 2 ผลบวก เท่ากับ 8 เนื่องจาก $5+5$ เท่ากับ 10 และ 3 น้อยกว่า 5 อยู่ 2”

2. การบวกเลขสองจำนวนที่ประกอบด้วยเลขหลายหลัก

ในการพัฒนามโนติเกี่ยวกับการบวก เช่น หาผลบวกของ $578 + 876$ ผู้เรียนจะใช้สื่อรูปธรรม ซึ่งในที่นี้ใช้ 10-based block ดังต่อไปนี้



จากผลของการจัดกระทำกับสื่อ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

$$\begin{array}{r} 500 + 60 + 8 \\ 800 + 70 + 6 \\ \hline 1300 + 130 + 14 \\ (1300+100) + (30+10) + 4 \\ \hline 1400 + 40 + 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \\ + \\ + \\ \hline + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \ 1 \\ 5 \ 6 \ 8 \\ 8 \ 7 \ 6 \\ \hline 14 \ 3 \ 4 \end{array}$$

การสร้างมโนคติทางพีชคณิต

1. การคูณพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง โดยการนำเสนอด้วยพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & 1 \\ \hline x & x^2 \\ \hline \end{array} \quad x(x+1) = x^2 + x$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & 2 \\ \hline x & x^2 \\ \hline \end{array} \quad x(x+2) = x^2 + 2x$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & 3 \\ \hline x & x^2 \\ \hline \end{array} \quad x(x+3) = x^2 + 3x$$



ผู้เรียนใช้สิ่งที่ได้เรียนรู้มาใช้ในการหาผลคูณของ $x(x+4)$
หรือ $x(x+10)$ หรือ $x(x-2)$ หรือ $(x+1)(x-2)$

2. การคูณพหุนามโดยประยุกต์ใช้วิธีการคูณ
จำนวนเต็ม เช่น $2x^2 + 5x + 7$ คูณด้วย $3x^2 + 7x + 5$
หาผลคูณโดยการประยุกต์ใช้วิธีการของ 257 คูณด้วย 375
ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} 257 \\ 375 \times \\ \hline 1285 \\ 1799 \\ 771 \\ \hline 96375 \end{array}$$

กระจายตัวตั้งและตัวคูณให้อยู่ในรูปของค่าประจำหลัก

วิธีการกระจายตัวเลขในแต่ละหลัก

$$\begin{array}{r} 200 + 50 + 7 \\ 300 + 70 + 5 \times \\ \hline 1000 + 250 + 35 \\ 14000 + 3500 + 490 \\ 60000 + 15000 + 2100 \\ \hline 60000 + 29000 + 6600 + 740 + 35 = 9635 \end{array}$$

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. (2546). พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2)

พร้อมกฎกระทรวงที่เกี่ยวข้องและพระราชบัญญัติการศึกษาภาคบังคับ พ.ศ. 2545. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์
องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ ชุมชน
สหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

พรณี ข. เจนจิต. (2545). จิตวิทยาการเรียนรู้การสอน. กรุงเทพฯ: บริษัท เมธิทปส์ จำกัด.

Crowley, L. (2000). *Cognitive structures in college algebra*. Ph.D. dissertation, The University of Warwick,
UK.

Dubinsky, E. (1992). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Ed.), *Advanced
mathematical thinking*. (pp.95-125). Dordrech Kluwer Academic Publishers

Goldin, G.A., & Kaput, J.J. (1996). A join perspective on the ideas of representation in learning and
doing mathematics. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin, & B. Geer (Eds.). *Theories
of mathematical learning*. (pp.397-430). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

นำมาประยุกต์ใช้กับการคูณพหุนาม ดังนี้

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x + 7 \\ 3x^2 + 7x + 5 \times \\ \hline 10x^2 + 25x + 35 \\ 14x^3 + 35x^2 + 49x \\ 6x^4 + 15x^3 + 21x^2 \\ \hline 6x^4 + 29x^3 + 66x^2 + 74x + 35 \end{array}$$

บทสรุป

ในการจัดกิจกรรมเพื่อให้ผู้เรียนสร้างความรู้
ด้วยตนเองและเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ ครูจะต้องมีความ
เข้าใจว่ามโนทัศน์ที่ต้องการให้ผู้เรียนได้เรียนรู้มันจะถูก
สร้างโดยวิธีใด ซึ่งครูจะใช้ความรู้ความเข้าใจนั้นมาเป็น
แนวทางในการจัดกิจกรรมและใช้สื่อที่เหมาะสมสำหรับ
กับวิธีที่ใช้สร้างมโนทัศน์นั้นๆ



- Gray, E, & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. **Mathematical Education Research Journal**, 19(2), 23-40.
- Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. (pp.65-96). New York: Macmillan Publishing Company.
- NCTM. (2000). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA.: The National Council of Teachers of Mathematics.