

**การศึกษาความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์
โดยใช้โปรแกรม THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP)
เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ สำหรับนักศึกษามหาวิทยาลัยสุภานวงศ์
สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว**

**An Investigation of Souphanouvong University Students'
Mathematical Conceptual understanding on Vector Using The Geometer's
Sketchpad as a Learning Tool in Lao People Democratic Republic**

แสงดาว เพชรสมบัติ (Sengdao Phethsombath)*
ชาญณรงค์ เฮียงราช (Channarong Heingraj, Ph.D.)**

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความเข้าใจของนักศึกษาเกี่ยวกับเวกเตอร์ โดยใช้ GSP เป็นฐานในการเรียนการสอน รูปแบบของการวิจัยในครั้งนี้ ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ โดยใช้รูปแบบทดลองเชิงการสอน กลุ่มเป้าหมายเป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยสุภานวงศ์ชั้นปีที่ 3 วิทยาเขตนาสร้างเหว อำเภอลองพระบาง จังหวัดหลวงพระบาง ในสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว จำนวน 6 คน คัดเลือกมาแบบเจาะจง (Purposive Sampling) โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม (กลุ่มละ 3 คน) ประกอบด้วยกลุ่มนักศึกษาที่มีระดับคะแนนในระดับต่ำ และกลุ่มที่มีระดับคะแนนสูง โดยพิจารณาจากคะแนนสอบคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ กิจกรรมการเรียนรู้ 7 กิจกรรม ผู้วิจัยดำเนินการจัดการเรียนการสอนตามกิจกรรมที่บูรณาการด้วยโปรแกรม GSP ในระหว่างที่นักศึกษาทำกิจกรรมแก้ปัญหาด้วยวิธีการคิดพร้อมออกเสียง เก็บรวบรวมข้อมูลด้วยการบันทึกภาคสนาม ผู้วิจัยใช้โปรแกรมการแก้ปัญหาของนักศึกษา จำนวน 10 โปรแกรม และงานเขียนของนักศึกษาในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาระดับความเข้าใจของนักศึกษา โดยใช้กรอบทฤษฎี APS ที่พัฒนาขึ้นโดย ชาญณรงค์ เฮียงราช (2552) กำหนดระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ระดับคือ ความเข้าใจระดับการจัดกระทำ (Action) ความเข้าใจระดับกระบวนการ (Process) และ ความเข้าใจระดับโครงสร้าง (Structure)

ผลการวิจัยพบว่านักศึกษาได้แสดงออกถึงการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของเวกเตอร์ การบวกและลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จากระดับการจัดกระทำ ไปเป็นระดับกระบวนการ และเป็นระดับโครงสร้าง

คำสำคัญ: ความเข้าใจ มโนคติ เวกเตอร์

Keyword: Understanding, Concept, Vector

* นักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

** อาจารย์ประจำ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

Abstract

The purpose of this study was to investigate students' conceptual understanding about the vector using the Geometer's Sketchpad (GSP) as a tool for teaching and learning. The qualitative research method using teaching experiment and case study were administered. The third year students at Souphanouvong University, Nasangveuy campus, Luang Prabang district, Luang Prabang province, in the Lao People's Democratic Republic, 6 people were selected as purposive sampling, were divided into 2 groups (3 per each group) composed of students with low scores and high scores, respectively, according to their mathematics scores of the first semester of 2552 academic year. Assigned seven learning activities were conducted. These activities incorporated the GSP as a learning tool. The students were asked to thinking aloud. Field notes and audio- and video-tape were used to record students' performance through all activities mentioned early. Ten protocols, Field notes and students artifacts were used to analyze the students' levels of understanding based on the levels of students' cognitive development and the research theoretical framework (Action-Process-Structure [APS] conceptual understanding) developed by Heingraj (2552). These levels of mathematical conceptual understanding were classified into 3 levels as action, process and structure conceptual understanding

The results indicated the students demonstrated their development about definition of vector, addition and subtraction of vectors and the multiplication vector with scalar in terms of action, process and structure conceptual understanding.

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โดยทั่วไปการสอนของครูในสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ปัจจุบันส่วนมากใช้วิธีบรรยายให้นักเรียนจดบันทึกจากกระดานดำ สาเหตุที่เป็นเช่นนี้ เพราะว่าครูเคยเรียนมาด้วยวิธีการสอนแบบนี้ ครูขาดการฝึกอบรมเกี่ยวกับวิธีสอนที่เหมาะสม ทฤษฎีการเรียนรู้และประสบการณ์จากการปฏิบัติ ตรงนี้ชี้ให้เห็นว่าการเรียนรู้เกิดจากการมองเห็น การฟังและการปฏิบัติจริงร่วมกับคนอื่น การใช้อุปกรณ์ที่ช่วยให้เกิดการเรียนรู้โดยการมองเห็นและเรียนรู้จากเพื่อน สามารถทำได้เรื่อย ๆ ซึ่งช่วยให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพเพิ่มขึ้น ดังนั้นในการเรียนการสอนจึงต้องเน้นการจัดบรรยากาศให้เกิดการเรียนรู้จากการมองเห็นและการปฏิบัติร่วมกัน เป้าหมายสำคัญในขณะนี้ก็คือ ต้องการให้ครูใช้วิธีสอนโดยการใช้อุปกรณ์ที่ช่วยให้เกิดการเรียนรู้และมองเห็นรูปภาพที่ชัดเจน ให้นักเรียนได้ปฏิบัติจริงเพื่อเป็นการเพิ่มเติมเข้าไปในการสอนแบบบรรยายและการจดบันทึกจากกระดานดำ เพื่อรับประกันว่ามีการพัฒนาทักษะ

ที่จำเป็นเกิดขึ้นกับนักเรียน จำเป็นต้องเอากิจกรรมให้นักเรียนได้ทดลองปฏิบัติจริง จากการค้นพบทางจิตวิทยาการศึกษาที่ว่านักเรียนบางคนเรียนได้จากการมองเห็นและจากการฟัง และนักเรียนส่วนมากเรียนรู้ได้จากการทำปฏิบัติจริง (สถาบันค้นคว้าวิทยาศาสตร์การศึกษาแห่งชาติลาว, 1997)

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่จัดอยู่ในกลุ่มทักษะที่เป็นเครื่องมือการเรียนรู้ ซึ่งเน้นความคิดความเข้าใจ เพื่อให้ นักเรียนมีทักษะพื้นฐานและใช้เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน และการเรียนรู้ในระดับสูง นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังมีบทบาทสำคัญในการนำไปสู่ความเจริญก้าวหน้าทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เศรษฐกิจ และสังคม ตลอดจนเป็นพื้นฐานการค้นคว้าในสาขาวิชาแขนงต่างๆ เกือบทุกประเภท เพราะว่าคณิตศาสตร์จะช่วยพัฒนาความคิดของนักเรียนให้สามารถคิดได้อย่างเป็นระบบ มีเหตุผล กระบวนการคิด และการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ (กรมวิชาการ, 2545)

Minxay Project (2005 อ้างถึงใน บุญทัน สุตพงศ์, 2550) กล่าวว่า เวกเตอร์ (Vectors) เป็นส่วนหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งมีเนื้อหาที่มีลักษณะเป็นนามธรรมเกี่ยวกับเรขาคณิต (Geometry) และ พีชคณิต (Algebra) เวกเตอร์ หมายถึง ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์จากการสำรวจข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับการสอนเรื่องเวกเตอร์ ในสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว เมื่อเดือนพฤศจิกายน ปี ค.ศ. 2005 พบว่า ครูคณิตศาสตร์ที่ทำการสอนเรื่อง เวกเตอร์ประสบปัญหาเกี่ยวกับการสอนเรื่องนี้ กล่าวคือ ครูไม่มีความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ ครูไม่มีวิธีการสอนที่เหมาะสม และครูไม่มีสื่ออุปกรณ์ช่วยในการสอน อย่างไรก็ตาม การแก้ปัญหาการจัดการเรียนการสอนเรื่องเวกเตอร์จำเป็นต้องใช้เวลาในการศึกษา และวิจัยเพื่อหาแนวทาง และวิธีการแก้ปัญหา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การทำความเข้าใจเกี่ยวกับแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2548) กล่าวว่า โปรแกรมคอมพิวเตอร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) ซึ่งเป็นระบบซอฟต์แวร์ทางคอมพิวเตอร์ ที่มีคุณค่าสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โปรแกรม GSP เป็นซอฟต์แวร์ที่ใช้สำหรับสร้าง สืบค้น และวิเคราะห์สิ่งต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์หลายด้าน เราสามารถใช้เรขาคณิตที่เป็นพลวัตสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีปฏิสัมพันธ์ได้หลากหลายตั้งแต่การค้นหาค่าในระดับพื้นฐานซึ่งเกี่ยวกับรูปร่างและจำนวนไปจนถึงภาพวาดขั้นสูงที่มีความซับซ้อนจะช่วยให้นักเรียนเสริมความรู้ความเข้าใจเรขาคณิต พีชคณิต ตรรกศาสตร์ แคลคูลัสและอื่น ๆ

Heingraj (2006) ได้กล่าวว่า โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) มีส่วนช่วยเป็นอย่างมากในการที่ช่วยจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนจัดกระทำกับรูปทรงเรขาคณิตทำให้นักเรียนสังเกตและศึกษาพฤติกรรมของรูปทรงเรขาคณิตเพื่อจะได้ข้อสรุปคุณสมบัติและความคิดรวบยอดทางเรขาคณิต Khairiree (2006) เสนอว่า (GSP) เป็นโปรแกรมทางด้านคณิตศาสตร์ที่สามารถเคลื่อนไหวได้ (Dynamic) ที่ให้

โอกาสครูและนักเรียนได้สร้างสรรค์ความรู้โดยการลากและสร้างกราฟ GSP สามารถเปลี่ยนแปลงรูปแบบการเรียนทางด้านคณิตศาสตร์โดยใช้ GSP ในการเรียนผ่านการสำรวจ การตรวจสอบ และการค้นหา GSP สามารถทำให้นักเรียนเกิดมโนภาพ และส่งเสริมการคาดคะเนก่อนที่มีการลงมือพิสูจน์ GSP ได้สนับสนุนความเข้าใจของนักเรียนและทำให้ทักษะการคิดทางด้านคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้สูงขึ้น

จากเหตุผลที่กล่าวมาแล้วข้างต้นจึงเป็นเหตุผลสำคัญในการที่จะนำเอาโปรแกรม GSP เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ของนักศึกษาเรื่องเวกเตอร์โดยใช้กรอบทฤษฎีพัฒนาความรู้ความเข้าใจ (Action-Process-Structure) ที่พัฒนาขึ้นโดย ชาญณรงค์ เหยียงราช (2552) ทั้งนี้เพื่อส่งเสริมและพัฒนาความรู้ความเข้าใจของนักศึกษาในเรื่องดังกล่าวอย่างเหมาะสม

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์เรื่อง เวกเตอร์โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้สำหรับนักศึกษามหาวิทยาลัยสุภาววงศ์ สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

คำถามการวิจัย

ความเข้าใจของนักศึกษาเกี่ยวกับเวกเตอร์ (Vector) โดยใช้โปรแกรม The Geometer's sketchpad (GSP) เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ อยู่ในระดับใด

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการศึกษาความเข้าใจในการเรียนการสอนเรื่อง เวกเตอร์ ความเข้าใจเป็นการเชื่อมโยงความรู้ที่หลากหลายภายในโครงสร้างทางปัญญา โดยมีการจัดระดับความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ระดับ ตามกรอบทฤษฎี APS (Action-Process-Structure) ชาญณรงค์ เหยียงราช (2552) ประกอบด้วย ความเข้าใจในระดับ

การจัดกระทำ ความเข้าใจในระดับกระบวนการ และความเข้าใจในระดับโครงสร้าง

1) ความเข้าใจในระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding) หมายถึง ความเข้าใจที่เกิดจากการที่ผู้เรียนใช้ความรู้เดิมมาสร้างความหมายต่อสิ่งเร้าจากภายนอกได้จากการสังเกตนักเรียนที่มีความเข้าใจจำกัดในระดับการจัดกระทำมีความสามารถในการปฏิบัติตามเงื่อนไขที่กำหนดหรือขั้นตอนการคำนวณที่กำหนดอย่างเป็นลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่องกัน ขั้นตอนในแต่ละขั้นตอนจะถูกกระทำให้สำเร็จก่อนที่จะทำในขั้นตอนต่อไป เช่น นักเรียนใช้เมนูในโปรแกรม GSP ในการวัดสร้างรูปเรขาคณิต หรือคลิกปุ่มผู้สร้างกิจกรรมสร้างขึ้นแล้วสังเกตผลที่เกิดขึ้นที่หน้าจอคอมพิวเตอร์

2) ความเข้าใจในระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding) หมายถึง ความเข้าใจที่เกิดจากการที่นักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจในระดับการจัดกระทำหรือการคิดคำนวณหลาย ๆ ครั้งจนกระทั่งสามารถใช้ความรู้ความเข้าใจที่เกี่ยวข้องมาสร้างข้อสรุปเป็นกรณีทั่วไปโดยการวิเคราะห์สังเคราะห์หรือเปรียบเทียบผลที่ได้จากการสังเกต การวัดหรือการคิดคำนวณ หรือการจัดกระทำอย่างเป็นลำดับขั้นตอนในรูปของมโนภาพ (Concept Images) โดยไม่จำเป็นต้องไปจัดกระทำหรือคิดคำนวณที่เป็นลำดับขั้นตอน นอกจากนี้ นักเรียนสามารถอธิบาย สะท้อน หรือคิดย้อนกลับกระบวนการจัดกระทำนั้นโดยไม่จำเป็นต้องแสดงการจัดกระทำในแต่ละขั้นตอนออกมา เช่น นักเรียนสามารถหาข้อสรุปเป็นกรณีทั่วไปจากผลการสังเกตการจัดกระทำกับรูปหรือสิ่งที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์

3) ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง (Structural Conceptual Understanding) หมายถึง ความเข้าใจที่เกิดจากการที่นักเรียนเชื่อมโยงความเข้าใจในระดับกระบวนการหลายๆ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกันเพื่อใช้ในการสร้างความเข้าใจในระดับกระบวนการใหม่หรือความเข้าใจในโมเดลทางคณิตศาสตร์ใหม่ในระดับที่สูงขึ้น หรือนำเอาความเข้าใจในระดับกระบวนการหลายๆ กระบวนการมาใช้ในการแก้ปัญหาผลจากการ

เชื่อมโยงความเข้าใจในระดับกระบวนการจะทำให้เกิดโครงสร้างทางปัญญา (Schema) ขึ้น อาจกล่าวได้ว่าความเข้าใจในระดับนี้เป็นการนำเอาความเข้าใจในระดับกระบวนการหลายๆ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกันมาเชื่อมโยงอย่างเหมาะสมเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างทางปัญญา

2. โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) หมายถึง โปรแกรมที่สามารถ แสดงกราฟ และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ เป็นเครื่องมือที่ขยายกรอบความสามารถเพิ่มเติมจาก ความสามารถของเครื่องคิดเลขกราฟิกนี้ ได้แก่ การคำนวณที่ยากนั้น ง่ายและรวดเร็วขึ้น นักเรียนสามารถใช้โปรแกรม GSP ในการตรวจสอบกราฟที่นักเรียนสร้างขึ้นได้อย่างถูกต้องแม่นยำ ตลอดจนขีดความสามารถในการปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับตัวเลขและประโยคสัญลักษณ์ทางพีชคณิต และปฏิบัติการทางสถิติ เป็นเครื่องมือทางการศึกษาที่มีคุณค่าสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

3. โปรโตคอล (Protocol) หมายถึง ข้อมูลเกี่ยวกับพฤติกรรมที่นักศึกษาแสดงออกในระหว่างการทำกิจกรรมการเรียนการสอนและการทำแบบทดสอบที่เกิดขึ้นตามลำดับเวลา ซึ่งได้จากการถอดเทปเสียง วีดิทัศน์ บันทึกภาพและเสียง การสัมภาษณ์เชิงลึก และการแก้ปัญหาของนักศึกษา

4. เวกเตอร์ หมายถึง ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางเราอาจใช้เส้นตรงที่มีลูกศรแทนเวกเตอร์ โดยที่ความยาวของเส้นตรงแทนขนาดของเวกเตอร์และทิศของลูกศรแทนทิศทางของเวกเตอร์ปริมาณทางฟิสิกส์ที่ใช้อธิบายธรรมชาติมี 2 ชนิดคือ

1) ปริมาณที่เป็น เวกเตอร์ (Vector) ซึ่งเป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น การกระจัด (Displacement) แรง (Force) ความเร็ว (Velocity) และความเร่ง (Acceleration)

2) ปริมาณที่เป็นสเกลาร์ (Scalar) ปริมาณประเภทนี้จะมีเพียงขนาดเท่านั้น เช่น ระยะทาง (Distance) มวล (Mass) อัตราเร็ว (Speed) และความหนาแน่น (Density)

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกรณีศึกษาโดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพซึ่งเน้นการวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description) ผู้ร่วมวิจัยประกอบด้วยผู้วิจัย 1 คน ผู้ช่วยวิจัย 5 คน

1. **กลุ่มเป้าหมาย** เป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ภาควิชา คุรุศาสตรบัณฑิต คณะศึกษาศาสตร์ วิทยาเขตนาสร้างเหว มหาวิทยาลัยสุภานุวงศ์ อำเภอหลวงพระบาง จังหวัดหลวงพระบาง ในสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว จำนวน 6 คน โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม (กลุ่มละ 3 คน) ประกอบด้วยกลุ่มนักศึกษาที่มีระดับคะแนนในระดับต่ำ และกลุ่มที่มีระดับคะแนนสูง

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1) แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องเวกเตอร์ จำนวน 7 กิจกรรม

2) แบบทดสอบหลังเรียนเรื่อง เวกเตอร์

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บข้อมูลกับนักศึกษาชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ภาควิชา คุรุศาสตรบัณฑิต คณะศึกษาศาสตร์ วิทยาเขตนาสร้างเหว มหาวิทยาลัยสุภานุวงศ์ อำเภอหลวงพระบาง จังหวัดหลวงพระบาง สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ระหว่างเดือนกุมภาพันธ์ 2553 ถึงเดือนเมษายน 2553

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ทำการวิเคราะห์จากการทำใบกิจกรรมแบบฝึกหัด แบบทดสอบโปรโตคอล จากการบันทึกวีดิทัศน์โดยใช้กรอบทฤษฎี Action-Process-Structure ที่พัฒนาโดย ชาญณรงค์ เขียงราช (2552) ซึ่งได้จำแนกความเข้าใจในมิติทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ลักษณะ คือ ความเข้าใจในระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding) ความเข้าใจในระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding) และความเข้าใจในระดับโครงสร้าง (Structural Conceptual Understanding)

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

1. สรุปผลการวิจัย

1) **ความเข้าใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระดับการจัดกระทำ** นักศึกษามีความเข้าใจคือสามารถบอกความหมายของเวกเตอร์ สามารถนำใช้โปรแกรม GSP ตามคำสั่งเช่นกดปุ่ม [+] และ [-] และเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับขนาดของส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง สามารถนำใช้โปรแกรม GSP ตามคำสั่งเช่นปรับความเร็วของเรือ ความเร็วของกระแส น้ำ และทิศทางของเรือ และเมื่อคลิกปุ่ม [เดินทาง] ทำให้เรือขึ้นฝั่งในตำแหน่งที่ต้องการได้ แต่ไม่สามารถอธิบายวิธีการกำหนดทิศทางของเรือเพื่อให้ขึ้นฝั่งที่ท่าเรือที่ต้องการได้ นักศึกษาไม่สามารถสรุปวิธีการหาผลบวกของ $\vec{u} + \vec{v}$ โดยใช้สามเหลี่ยมได้ สามารถปรับค่า a ให้เท่ากับ 5 และให้ความหมายของ $5\vec{u}$ นักศึกษาลึกที่ ปุ่ม ส่วนแบ่งของ AB และ ส่วนแบ่งของ AC แล้วใช้ปุ่ม [+] หรือ [-] เพื่อเพิ่มหรือลดค่า และสามารถเติมข้อความลงในตารางที่กำหนดให้ได้

2) **ความเข้าใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระดับกระบวนการ** นักศึกษาสามารถปฏิบัติตามคำสั่งชี้แจงในหน้าที่ 3 ได้ และสามารถสรุปวิธีการหาผลบวกของ $\vec{u} + \vec{v}$ โดยใช้สี่เหลี่ยมได้ นักศึกษาปฏิบัติตามคำสั่งชี้แจงในหน้าที่ 4 ได้ และสามารถสรุปวิธีการหาผลบวกเวกเตอร์มากกว่าสองเวกเตอร์ได้ สามารถใช้ GSP ตามคำสั่งเช่นกดปุ่ม [+] หรือปุ่ม [-] ทำซ้ำไปซ้ำมาหลายครั้งปรับเปลี่ยนค่า a และเขียนความหมายของเวกเตอร์ $5\vec{u}$

3) **ความเข้าใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระดับโครงสร้าง** นักศึกษาสามารถเขียนเวกเตอร์แทนการเดินทาง และสามารถคำนวณหาระยะทางจากจุดเริ่มต้นและบอกทิศทางได้ นักศึกษาสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์หาค่าของ x จากสมการ $7\vec{u} + (2x - 4)\vec{v} = \frac{500}{7}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ ได้คือ $x > \frac{7}{3}$ นักศึกษาสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์หาค่าของ a และ b จากสมการ $\vec{w} = (a + 4b)\vec{u} + (2a + b + 1)\vec{v}$ และ $\vec{s} = (b - 2a + 2)\vec{u} + (2a - 3b - 1)\vec{v}$ แล้ว $3\vec{w} = 2\vec{s}$ ได้คือ $a = 2$ และ $b = -1$

2. อภิปรายผลการวิจัย

1) **ความเข้าใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระดับการจัดกระทำ** เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการที่ผู้เรียนใช้ความรู้เดิมมาสร้างความหมายต่อสิ่งเร้าจากภายนอกได้จากการสังเกตนักเรียนที่มีความเข้าใจจำกัดในระดับการจัดกระทำมีความสามารถในการปฏิบัติตามเงื่อนไขที่กำหนดหรือขั้นตอนการคำนวณที่กำหนดอย่างเป็นลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่องกัน เช่น นักเรียนสามารถบอกความหมายของเวกเตอร์สามารถนำไปใช้โปรแกรม GSP ตามคำสั่ง เช่น ปรับความเร็วของเรือ ความเร็วของกระแสน้ำ และทิศทางของเรือ และเมื่อคลิกปุ่ม **[เดินทาง]** ทำให้เรือขึ้นฝั่งในตำแหน่งที่ต้องการได้ แต่ไม่สามารถอธิบายวิธีการกำหนดทิศทางของเรือเพื่อให้ขึ้นในตำแหน่งที่ต้องการได้

2) **ความเข้าใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระดับกระบวนการ** ความเข้าใจในระดับนี้เกิดจากการที่นักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจในระดับการจัดกระทำหรือการคิดคำนวณหลาย ๆ ครั้ง จนกระทั่งสามารถใช้ความรู้ความเข้าใจที่เกี่ยวข้องมาสร้างข้อสรุปเป็นกรณีทั่วไป เช่น นักเรียนสามารถ ปฏิบัติตามคำสั่งในหน้าที่ 3 ได้ และสามารถสรุปวิธีการหาผลบวกของ $\vec{u} + \vec{v}$ โดยใช้สี่เหลี่ยมได้ สามารถสรุปวิธีการหาผลบวกเวกเตอร์มากกว่าสองเวกเตอร์ได้ สามารถใช้ GSP ตามคำสั่งเช่น กดปุ่ม **[+]** หรือปุ่ม **[-]** ทำซ้ำไปซ้ำมาหลายครั้งปรับเปลี่ยนค่า a และเขียนความหมายของเวกเตอร์ $5\vec{u}$

3) **ความเข้าใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระดับโครงสร้าง** เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการที่นักเรียนเชื่อมโยงความเข้าใจในระดับกระบวนการหลาย ๆ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกันเพื่อใช้ในการสร้างความเข้าใจในระดับกระบวนการใหม่หรือความเข้าใจใหม่ในมิติทางคณิตศาสตร์ใหม่ในระดับที่สูงขึ้น เช่น นักเรียนสามารถเขียนเวกเตอร์แทนการเดินทาง และสามารถคำนวณหาระยะห่างจากจุดเริ่มต้นและบอกทิศทางได้ และสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์หาค่าของ x และ a จากสมการได้

4) โปรแกรม GSP มีบทบาทสำคัญ

ในการเป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้ โดยครูเป็นผู้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อเน้นที่จะสร้างความรู้ความเข้าใจให้กับนักศึกษา นักศึกษาสามารถสร้างข้อคาดการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างหลากหลาย จากผลการวิจัยพบว่า โปรแกรม GSP เป็นเครื่องมือที่ใช้นำเสนอลักษณะความเข้าใจของนักศึกษา โดยแยกออกเป็น 3 ลักษณะดังนี้ 1) ความเข้าใจในระดับการจัดกระทำ 2) ความเข้าใจในระดับกระบวนการและ 3) ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Heingraj (2006) เกี่ยวกับบทบาทของโปรแกรม GSP ในกระบวนการสร้างความเข้าใจในมิติทางเรขาคณิตเกี่ยวกับการเลื่อนขนานที่นักศึกษามักสร้างข้อคาดการณ์ต่าง ๆ ได้เองโดยผ่านโปรแกรม GSP

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะที่ได้จากการวิจัย

1) ควรฝึกให้ผู้เรียนได้ใช้ GSP ในการแก้เวกเตอร์สถานการณ์ปัญหาต่าง ๆ อยู่เสมอ ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนได้เห็นประโยชน์ และกระตือรือร้นที่จะเรียนรู้

2) การนำ GSP เข้าไปในชั้นเรียนคณิตศาสตร์นั้น ครูต้องทราบถึงศักยภาพของเทคโนโลยีนี้ และเลือกบูรณาการเข้ากับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ให้มีความสอดคล้องและเหมาะสม เพื่อจะได้ยกระดับในการเรียนรู้ของผู้เรียนอย่างแท้จริง

3) ในกระบวนการสร้างความเข้าใจของผู้เรียนนั้นผู้เรียนได้แสดงออกมาด้วยภาษาที่ผู้เรียนเข้าใจที่ไม่สอดคล้องกับเนื้อหาและนิยามทางคณิตศาสตร์ บทบาทของครูคือเชื่อมโยงสิ่งที่ผู้เรียนมีกับสิ่งที่อยู่ในตำราเรียนให้ได้ และส่งผลให้นักศึกษารู้ได้ด้วยความเข้าใจของตนเองอย่างแท้จริง

2. ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1) ศึกษาการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา โดยสร้างกิจกรรมการเรียนรู้หรือจัดสภาพแวดล้อมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับทฤษฎี APS (Action-Process-Structure) ที่พัฒนาโดย ชาญณรงค์ เอียงราช (2552)

2) ในการสัมภาษณ์นักศึกษา การใช้คำถาม เตรียมคำถามเพื่อให้นักศึกษาได้ทบทวนวิธีการและเพื่อให้การศึกษาเข้าถึงวิธีคิดของตัวเอง ผู้วิจัยควรมีการจัด คำตอบของเขาโดยไม่เร่งรีบเพื่อเอาคำตอบจากนักศึกษา

เอกสารอ้างอิง

- กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2545). **คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช (2544).** กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้า และวัสดุภัณฑ์
- ชาญณรงค์ เชียงราช. (2552). **ศาสตร์เกี่ยวกับการรู้กับคณิตศาสตร์ศึกษา.** ขอนแก่น: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- บุญทัน สุตพงศ์. (2550). **การพัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องแบร์เซินเตอร์โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้สำหรับนักศึกษา มหาวิทยาลัยสุภาววงศ์ สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว.** วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- สถาบันค้นคว้าวิทยาศาสตร์การศึกษาแห่งชาติประเทศลาว. (1997). **เอกสารประกอบ การอบรมครูสอนชั้น ม.2 – ม.3 เพื่อสอนหลักสูตรใหม่.** นครหลวงเวียงจันทน์: โรงพิมพ์กระทรวงศึกษาธิการ.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2548). **คู่มืออ้างอิง The Geometer's Sketchpad (ซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์เรขาคณิตพลวัต) VERSION 4.** กรุงเทพฯ: สสวท.
- Hiengraj, C. (2006, September). **Roles of the Geometer's Sketchpad in Students' Processes of Geometric Conceptual Construction: A Case Study.** Paper presented at the Thailand International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education, held of Chiang Mai Rajabhat University, Chiang Mai, Thailand. September 17-20, 2006.
- Khairiree, K. (2006). Enhancing Students' Understanding in Mathematics Through The Use of Geometer's Sketchpad. In Dhompongsa et al. (Eds.), **Thailand International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education.** (pp.91-103). Chiang Mai: Chiang Mai Rajabhat University, Thailand.