

การสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารเศษส่วนของ นักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ระหว่างการทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ Mathayomsuksa I Students's Mathematical Sense Making About Multiplication and Division of Fractions During Their Learning Period Using The Geomether's Sketchpad as a Learning Tool

มานะ ทีคลัง (Mana Teekhang)*

ชาญณรงค์ เอียงราช (Channarong Heingraj, Ph.D.) **

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์และวิเคราะห์ระดับความเข้าใจ
ในโมเดลทางคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณและการหารเศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนรู้ โดยใช้โปรแกรม
The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพแบบกรณีศึกษา
ทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยการวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) และ การบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic
Description) กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 6 คน แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน ทำการ
บันทึกวีดิทัศน์ และบันทึกเสียงของนักเรียนขณะร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้โปรแกรม The Geometer's
Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ จำนวน 7 กิจกรรม หลังทำกิจกรรมให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดความ
เข้าใจเป็นรายบุคคลและสัมภาษณ์นักเรียนหลังทำกิจกรรมการเรียนการสอน หลังทำแบบทดสอบวัดความเข้าใจ ทำการ
วิเคราะห์ข้อมูลการสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Bulgar (2003) พบว่านักเรียนใช้โปรแกรม The
Geometer's Sketchpad สร้างตัวแทนภายในใจ (Mental Representation) สังเกตเห็นความสัมพันธ์ภายในใจ เกิด
แผนภาพภายในใจที่เป็นตัวแทนความรู้ของการคูณและการหารเศษส่วน จัดระบบตัวแทนความรู้เป็นลำดับขั้นตอน สรุป
หลักเกณฑ์การคูณและการหารเศษส่วนไปเก็บไว้ในกรอบ(Frames) และวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์
ตามกรอบทฤษฎีของ Pirie & Kieren (1994) พบว่านักเรียนมีความเข้าใจในระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม
(Formalizing) คือ นักเรียนสามารถสรุปหลักการคูณและการหารเศษส่วนได้อย่างชัดเจน แม่นยำ นำไปใช้แก้ปัญหา
เกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วนอย่างเป็นลำดับขั้นตอน

คำสำคัญ: การสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์ ความเข้าใจในโมเดลทางคณิตศาสตร์

Keywords: Mathematical Sense Making, Mathematical Conceptual Understanding

* นักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

** อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ABSTRACT

The purpose of present study were to analyze Mathayomsuksa I students's mathematical sense making and level of mathematical conceptual understanding about multiplication and division of fractions of their learning using the geometer's sketchpad program as a learning tools. The study employed the qualitative, case – study research method. The collected data were analyzed by means of protocol analysis and analytic description. The target group consisted of six Mathayomsuksa I students subsequently organized into 2 groups of 3 each. Each groups of the students was asked to work together to learning 7 lesson plans with used the geometer's sketchpad program as a learning tools, made conceptual understanding test. While the students were working the researcher and her co-researchers made videotape and tape recording and took field notes of the activity and interview conceptual understanding test complete. The analysis was means of mathematical sense making according Bulgar (2003) and students' level of understanding according Pirie & Kieren (1994) theoretical framework. The findings showed that after used the Geometer's Sketchpad, students could creat mental representation, notice mental coherence, have mind map that was the representing their knowledge of multiplication and division of fraction, organize the system of knowledge respectively, conclude the principle of multiplication of fraction and division of fraction to keep the frames of multiplication and division of fractions to solve the problems. Students' level of understanding according Pirie & Kieren (1994) on formalizing the students were able to conclude clearly the principle of multiplication and division of fractions to solve respectively the problem involving the multiplication and division of fractions.

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นเฉพาะในแต่ละบุคคล โดยจะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อนักเรียนใช้ความรู้หรือประสบการณ์ที่มีอยู่มาสร้างความหมายจากการที่ได้ปฏิสัมพันธ์กับวัตถุและปรากฏการณ์ในสิ่งแวดล้อม โดยเริ่มจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมและมีพัฒนาการต่อไปเรื่อย ๆ จนในที่สุดสามารถคิดในสิ่งที่เป็นนามธรรมได้ (สุรางค์ โคว์ตระกูล, 2544) สำหรับการสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์ คือ การที่นักเรียนเกิดการคิดที่เกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ขณะเผชิญสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ จะเกิดการสร้างตัวแทนภายในใจ (Mental Representation) ขึ้นมา ตัวแทนนี้จะเกิดขึ้นมาอย่างรวดเร็ว เมื่อนักเรียน ทำการค้นหาหรือสร้างองค์ความรู้ที่เกี่ยวข้องเพื่อที่จะจัดกระทำกับองค์ความรู้เหล่านั้น แผนภาพภายในใจเหล่านั้นจะถูกสร้างขึ้นระหว่างที่ตัวแทนของข้อมูลถูกใส่เข้าไป จะเกิดตัวแทนของความ

ขึ้น และตัวแทนความรู้จะถูกตรวจสอบ แก้ไขปรับปรุงนำไปเก็บไว้ในกรอบ (Frames) กรอบจะเป็นตัวนำองค์ความรู้ และจัดระบบขององค์ความรู้อย่างเป็นระบบและเป็นลำดับขั้นตอนแล้วเก็บไว้อย่างอย่างมีเสถียรภาพภายในกรอบที่อยู่ภายในใจของนักเรียน (Bulgar, 2003) จนเกิดเป็นความเข้าใจ ซึ่ง Pirie & Kieren (1994) ได้เสนอระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็น 8 ระดับ คือ ระดับที่หนึ่งคือความรู้พื้นฐาน (Primitive Knowing) ระดับที่สองคือการสร้างโมโนภาพ (Image Making) ระดับที่สามคือการมีโมโนภาพ (Image Having) ระดับที่สี่คือการสังเกตคุณสมบัติ (Property Noticing) ระดับที่ห้าคือการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) ระดับที่หก คือ การสังเกต (Observing) ระดับที่เจ็ดคือ การสร้างโครงสร้าง (Structuring) ระดับที่แปดคือการสร้างโมโนตีใหม่ (Inventizing) ดังนั้นการที่ผู้เรียนจะสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์จนเกิดเป็นความเข้าใจ

ที่ลึกซึ้งได้นั้น ผู้เรียนจะต้องมีเวลาเพียงพอในการสำรวจปัญหา และจะต้องสำรวจด้วยความกระตือรือร้น (Bulgar, 2003) โดยเทคโนโลยีเป็นส่วนที่สำคัญในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีจะช่วยยกระดับการสอนของครูและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนให้สูงขึ้น (NCTM, 2000) โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นโปรแกรมหนึ่งที่ช่วยทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ตามมาตรฐานการเรียนรู้ของหลักสูตร สามารถพัฒนานักเรียนให้มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มีทักษะการจินตนาการ เกิดทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง (สสวท, 2548)

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาการสร้าง ความหมายทางคณิตศาสตร์ และความเข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณ และการหารเศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนรู้โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การที่นักเรียนเผชิญสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ และสร้างตัวแทนภายในใจ (Mental Representation) ขึ้นมา และเมื่อนักเรียนทำการจดจำ ค้นหาหรือสร้างองค์ความรู้ที่เกี่ยวข้องเพื่อที่จะจัดกระทำกับองค์ความรู้เหล่านั้น แผนภาพภายในใจเหล่านั้นก็จะถูกสร้างขึ้นระหว่างที่ตัวแทนของข้อมูลถูกใส่เข้าไป จะเกิดตัวแทนของความรู้ขึ้น และตัวแทนความรู้จะถูกตรวจสอบและแก้ไขปรับปรุง ท้ายที่สุดจะถูกนำไปใช้ในการแก้ปัญหา ตัวแทนข้อมูลจะถูกนำไปเก็บไว้ในกรอบ (Frames) ซึ่งกรอบจะเป็นตัวนำองค์ความรู้ และจัดระบบอย่างเป็นลำดับขั้นตอนแล้วเก็บไว้อย่างเป็นเสถียรภาพภายในกรอบที่อยู่ภายในใจของนักเรียน จนเกิดเป็นความเข้าใจ (Bulgar, 2003)

2. ความเข้าใจ เป็นความเข้าใจตามกรอบที่ Pirie & Kieren (1994) ได้เสนอระดับความเข้าใจทาง

คณิตศาสตร์ที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ 8 ระดับ แต่ผู้วิจัยนำมาใช้ในการศึกษา 6 ระดับ เพราะแบบทดสอบวัดความเข้าใจสามารถวัดได้ถึงระดับที่ 6

ระดับที่ 1: ความรู้พื้นฐาน (Primitive Knowing) เป็นความรู้เดิมที่ใช้เป็นพื้นฐานในการสร้างความรู้ใหม่ ระดับความเข้าใจในระดับนี้จะเป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยการที่นักเรียนนำเอาความรู้นี้มาใช้ในการสร้างความหมายเกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนกำลังจัดกระทำอยู่

ระดับที่ 2: การสร้างมโนภาพ (Image Making) เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการที่นักเรียนใช้ความรู้พื้นฐานมาสร้างความหมายจากการจัดกระทำกับสื่อที่เป็นรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์

ระดับที่ 3: การมีมโนภาพ (Image Having) ความเข้าใจในระดับนี้เป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากการที่นักเรียนจัดกระทำกับสื่อหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ จนกระทั่งสามารถที่จะสร้างภาพความคิดในใจได้ ทั้งสามารถอธิบาย สะท้อน หรือคิดย้อนกลับกระบวนการสร้างนั้น โดยไม่จำเป็นต้องแสดงการจัดกระทำดังเช่นในระดับการสร้างมโนภาพ

ระดับที่ 4: การสังเกตคุณสมบัติ (Property Noticing) ความเข้าใจในระดับนี้เป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากการที่นักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนภาพที่มีโดยการจัดกระทำหรือรวมมโนภาพนั้น เพื่อสร้างบริบทที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติ

ระดับที่ 5: การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) ความเข้าใจในระดับนี้เกิดจากการที่นักเรียนหาข้อสรุปในเชิงนามธรรม (นิยามหรือสูตร) หรือข้อสรุปในกรณีทั่วไปได้

ระดับที่ 6: การสังเกต (Observing) ความเข้าใจในระดับนี้ นักเรียนสามารถ สะท้อน เชื่อมโยง หรือรวมความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรมเพื่อสร้างเป็นทฤษฎีบท

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพแบบกรณีศึกษา (Case Study) เน้นการวิเคราะห์โปรโตคอล

(Protocol Analysis) และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description)

กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียนหินกองวิทยาคาร อำเภอสุวรรณภูมิ จังหวัดร้อยเอ็ด จำนวน 6 คน คัดเลือกมาจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยผู้วิจัยและครูประจำรายวิชา โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบก่อนเรียน กิจกรรมการเรียนการสอนที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ จำนวน 7 กิจกรรม และแบบทดสอบวัดความเข้าใจในมิติทางคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารเศษส่วน

เก็บรวบรวมข้อมูลโดยการบันทึกวีดิทัศน์ และบันทึกเสียงของนักเรียนในระหว่างที่ครูดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน และสัมภาษณ์นักเรียนหลังทำกิจกรรมการเรียนการสอน หลังทำแบบทดสอบวัดความเข้าใจในมิติทางคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารเศษส่วน

วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้การวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) การแก้ปัญหาของนักเรียน จำนวน 13 โปรโตคอล งานเขียน แบบทดสอบวัดความเข้าใจของนักเรียน บันทึกการสัมภาษณ์ เพื่อวิเคราะห์การสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์ที่ถูกปรับตามแนวคิดของ Bulgar (2003) และวิเคราะห์ระดับ ความเข้าใจในมิติทางคณิตศาสตร์ตามกรอบทฤษฎีของ Pirie & Kieren (1994)

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

1. สรุปผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์การสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การคูณและการหารเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ระหว่างการทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ พบว่านักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อนมีวิธีการสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์เหมือนกัน ดังนี้

1) หลังจากที่ได้ฟังคำอธิบายจากครู นักเรียนลงมือปฏิบัติตามคำสั่งในใบกิจกรรม โดยการคลิกเพิ่มหรือลดจำนวนเศษส่วน แล้วสังเกตคำตอบที่เกิดขึ้น

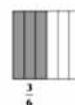
ซึ่งแสดงด้วยภาพ สามารถอธิบายได้ว่าผลลัพธ์ที่แสดงแทนด้วยภาพที่แสดงแทนเศษส่วน นั่นคือนักเรียนสร้างตัวแทนภายในใจ (Mental Representation) ขึ้นมา

2) หลังจากนักเรียนทำการค้นคว้า จากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad โดยการคลิกเพิ่มหรือลดเศษส่วน สังเกตผลลัพธ์ที่แสดงด้วยภาพกับผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนเศษส่วน พร้อมทั้งแลกเปลี่ยนเรียนรู้กันระหว่างเพื่อนในกลุ่มและครูแล้ว นักเรียนมองเห็นว่า ผลลัพธ์ที่เกิดจากการคูณ จะต้องนำเศษคูณเศษส่วนคูณส่วน และการหารเศษส่วน จะต้องเปลี่ยนจากเครื่องหมายหารเป็นเครื่องหมายคูณ กลับเศษเป็นส่วนแล้วค่อยนำมาคูณกันเหมือนการคูณเศษส่วน ทำให้เกิดเป็นแผนภาพภายในใจซึ่งเป็นตัวแทนความรู้ขึ้นมา

3) หลังจากนั้นนักเรียนทำการจัดระบบตัวแทนความรู้เหล่านี้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน ทำให้สามารถสรุปหลักเกณฑ์การคูณเศษส่วน กระทำได้โดยนำตัวเศษคูณตัวเศษและตัวส่วนคูณตัวส่วน ($\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$) และการหารเศษส่วน กระทำได้โดยเปลี่ยนเครื่องหมายหารเป็นคูณเปลี่ยนเศษเป็นส่วนและเปลี่ยนส่วนเป็นเศษแล้วเอามาคูณกันเหมือนการคูณเศษส่วน ($\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$) ไปเก็บไว้ในกรอบ (Frames) การคูณและการหารเศษส่วน

4) นักเรียนนำตัวแทนความรู้ที่ถูกเก็บไว้ในกรอบ (Frames) การคูณและการหารเศษส่วน ไปใช้แก้ปัญหาตัวอย่างเช่น นักเรียนจะหาคำตอบของ $\frac{3}{6} \times \frac{4}{8}$ เริ่มต้นนักเรียนจะศึกษาจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad คือ คลิกเพื่อเปลี่ยนเศษส่วนให้ได้จำนวนที่ต้องการ แล้วเลือกแสดงการคูณดังภาพ

$$\frac{3}{6} \times \frac{4}{8}$$

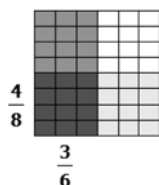


เริ่มต้น



แสดงการคูณ

จะได้ภาพคำตอบของการคูณเศษส่วนขึ้นมา ดังภาพ



ซึ่งเป็นตัวแทนภายในใจ (Mental Representation) และหลังจากศึกษาภาพคำตอบแล้วนักเรียนสามารถตอบได้ว่าคำตอบคือ $\frac{12}{48}$ ต่อจากนั้นนักเรียนจะสังเกตหาความสัมพันธ์ระหว่างภาพกับเศษส่วน จนมองเห็นว่า 12 ได้มาจาก 3×4 และ 48 ได้มาจาก 6×8 เกิดเป็นแผนภาพภายในใจ ซึ่งเป็นตัวแทนความรู้ขึ้นมา ต่อจากนั้นนักเรียนทำการจัดระบบตัวแทนความรู้เหล่านี้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน จนสามารถมองเห็นว่า 3×4 คือ การนำตัวเศษคูณตัวเศษ และ 6×8 คือ การนำตัวส่วนคูณตัวส่วน และสรุปหลักเกณฑ์การคูณเศษส่วนได้ คือ การคูณเศษส่วนต้องนำตัวเศษคูณตัวเศษตัวส่วนคูณตัวส่วน ไปเก็บไว้ในกรอบการคูณเศษส่วน ต่อจากนั้นก็นำความรู้ที่อยู่ในกรอบนี้ไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการคูณเศษส่วนต่อไป

นั่นคือนักเรียนเกิดการสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์ โดยเริ่มจากการเผชิญสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์คือ คำถามจากใบกิจกรรม ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ช่วยในการทำกิจกรรม สร้างตัวแทนภายในใจ (Mental Representation) ขึ้นมาได้จากการอธิบายผลลัพธ์ของการคูณและการหารเศษส่วน ซึ่งแสดงด้วยภาพ มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างผลลัพธ์กับจำนวนเศษส่วน เกิดเป็นแผนภาพภายในใจขึ้นระหว่างที่ตัวแทนของข้อมูลสำหรับการคูณเศษส่วน คือนำเศษคูณเศษส่วนคูณส่วน และการหารเศษส่วน คือเปลี่ยนเครื่องหมายหารเป็นคูณเปลี่ยนเศษเป็นส่วนแล้วเอามาคูณกันเหมือนการคูณเศษส่วนถูกใส่เข้าไป จะเกิดตัวแทนของความรู้ขึ้น คือการคูณเศษส่วนกระทำได้โดย นำเศษคูณเศษส่วนคูณส่วน ($\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$) และการหารเศษส่วนกระทำได้โดยเปลี่ยนเครื่องหมายหารเป็นคูณเปลี่ยนเศษเป็นส่วนแล้วเอามาคูณกันเหมือนการคูณเศษส่วน ($\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$) โดยวิธีการคูณและการหารเศษส่วนนี้จะถูกนำไปเก็บไว้ในกรอบ (Frames) ซึ่งเป็น

กรอบของการคูณและการหารเศษส่วน และจัดระบบอย่างเป็นลำดับขั้นตอนแล้วเก็บไว้อย่างเป็นเสถียรภาพภายในกรอบการคูณและการหารเศษส่วน เกิดเป็นตัวแทนภายในใจ ถูกตรวจสอบและแก้ไขปรับปรุง ท้ายที่สุดจะถูกนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

จากการวิเคราะห์ระดับความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณและการหารเศษส่วนตามกรอบทฤษฎีของ Pirie & Kieren (1994) นักเรียนทั้งสองกลุ่มมีระดับความเข้าใจ ดังนี้

ระดับที่ 1 ความรู้พื้นฐาน (Primitive Knowing) กล่าวคือ นักเรียนสามารถบอกความรู้เกี่ยวกับความหมายของเศษส่วน การเท่ากันของเศษส่วน (การหารด้วยจำนวนที่เท่ากันหรือเรียกว่าการตัดทอน) เศษเกิน จำนวนคละ การบวก - การลบเศษส่วน การคูณ - การหารจำนวนเต็ม ซึ่งเป็นความรู้พื้นฐานที่นำมาใช้ในการสร้างมโนคติเกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วน ดังภาพ

$$1.3) \quad \frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$$

ระดับที่ 2 การสร้างมโนภาพ (Image Making) กล่าวคือ นักเรียนสามารถนำความรู้พื้นฐานมาจัดกระทำกับการคูณและการหารเศษส่วน โดยหาคำตอบจากการคูณและการหารเศษส่วน โดยนำความรู้พื้นฐานโดยเฉพาะเรื่องเศษเกิน จำนวนคละ และการเท่ากันของเศษส่วน (การตัดทอน) มาใช้ในการหาคำตอบเกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วน ดังภาพ

$$1.2) \quad 3\frac{3}{5} \times 3\frac{3}{4}$$

ระดับที่ 3 การมีมโนภาพ (Image Having) กล่าวคือ นักเรียนสามารถคิดย้อนกลับไประหว่างความรู้พื้นฐานกับการคูณและการหารเศษส่วนโดยหาคำตอบของการคูณและการหารเศษส่วนหลาย ๆ จำนวน

โดยนำความรู้พื้นฐานโดยเฉพาะการเท่ากันของเศษส่วน (การตัดทอน) มาใช้ในการหาคำตอบ ซึ่งนักเรียนจะสามารถมองเห็นถึงการสลับที่กันของเศษส่วน ดังภาพ

$$2.2) \quad \left[2\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \right] + \frac{11}{12}$$

ระดับที่ 4 การสังเกตคุณสมบัติ (Property Noticing) กล่าวคือ นักเรียนสามารถเชื่อมโยง และรวมสมบัติของการคูณและการหารเศษส่วนมาใช้หาคำตอบ ที่มาแทนในตัวแปรจากการคูณและการหาร ดังภาพ

$$3.3) \quad \frac{1}{3} + a = -2$$

ระดับที่ 5 การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) กล่าวคือ นักเรียนสามารถสรุปหลักการเกี่ยวกับ การคูณและการหารเศษส่วนได้อย่างชัดเจน โดยนำไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วน อย่างเป็นลำดับขั้นตอน ดังภาพ

4.3) ไบรอนเทย์มีลูกนกทั้งหมด 1,800 คน เป็นตัว 1/45 นอกนั้นเป็นนกเรียน ไบรอนเทย์มีนกเรียน 5/11 ของจำนวนนกเรียนทั้งหมด ออกหาว่าไบรอนเทย์มีนกเรียนกี่ตัว

นั่นคือ นักเรียนมีระดับความเข้าใจเชิงโมโนติในเรื่อง การคูณและการหารเศษส่วน ดังนี้ ระดับที่ 1 ความรู้พื้นฐาน (Primitive Knowing) นักเรียนอธิบายความรู้เกี่ยวกับความหมายของเศษส่วน การเท่ากันของเศษส่วน (การหารด้วยจำนวนที่เท่ากันหรือเรียกว่าการตัดทอน) เศษเกิน จำนวนคละ การบวก - การลบเศษส่วน

การคูณ - การหารจำนวนเต็ม ซึ่งเป็นความรู้พื้นฐานที่นำมาใช้ในการสร้างโมโนติเกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วน ระดับที่ 2 การสร้างโมโนภาพ (Image Making) นักเรียนสามารถนำความรู้พื้นฐานโดยเฉพาะเรื่องเศษเกิน จำนวนคละ และการเท่ากันของเศษส่วน (การตัดทอน) มาจัดกระทำกับการคูณและการหารเศษส่วน ระดับที่ 3 การมีโมโนภาพ (Image Having) นักเรียนสามารถคิดย้อนกลับไประหว่างความรู้พื้นฐานกับการคูณและการหารเศษส่วนโดยหาคำตอบของการคูณและการหารเศษส่วนหลายๆจำนวน โดยนำความรู้พื้นฐานโดยเฉพาะการเท่ากันของเศษส่วน (การตัดทอน) มาใช้ในการหาคำตอบ ซึ่งนักเรียนจะสามารถมองเห็นถึงการสลับที่กันของเศษส่วน ระดับที่ 4 การสังเกตคุณสมบัติ (Property Noticing) นักเรียนสามารถเชื่อมโยง และรวมสมบัติของการคูณและการหารเศษส่วนมาใช้หาคำตอบที่มาแทนในตัวแปรจากการคูณและการหารเศษส่วน ระดับที่ 5 การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) นักเรียนสามารถสรุปหลักการเกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วนได้อย่างชัดเจน โดยนำไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วนอย่างเป็นลำดับขั้นตอน รวมทั้งนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน

2. อภิปรายผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์การสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ พบว่านักเรียนพยายามทำความเข้าใจกิจกรรมการเรียนรู้ที่ครูได้สร้างขึ้นซึ่งเป็นลักษณะของ Doing Mathematics คือ การนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ภายนอก (External Representation) (Cobb, Jaworsky & Pressmeg, 1996) ที่สังเกตเห็นได้ คือสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์จากการจัดกระทำเกี่ยวกับสื่อที่เป็นรูปธรรมในเชิงสัญลักษณ์ จากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad และสร้างตัวแทนความรู้ภายในใจ (Mental Representation) ขึ้นมา จากนั้นจะเป็นลักษณะการสร้างความหมายแบบ Knowing Mathematics คือการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ภายใน (Internal Representation) ที่เป็นกระบวนการคิด หรือกระบวนการสร้างที่อยู่ภายในหัว

ของนักเรียน โดยนักเรียนจะสร้างความหมายร่วมกัน (Negotiation of taken-as-share meaning) ระหว่างโปรแกรม The Geometer's Sketchpad กับนักเรียน ระหว่างครูกับนักเรียนและนักเรียนกับนักเรียนเอง โดยลักษณะของความหมายที่ถูกสร้างขึ้นนั้นจะเป็นแบบ Slide of Meaning คือ การค่อย ๆ เปลี่ยนแนวความคิด รับความรู้ใหม่แบบค่อยเป็นค่อยไป ซึ่งเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องและเชื่อมโยงกับความรู้เดิม ทำให้ตัวแทนภายในใจที่นักเรียนสร้างขึ้นมาครั้งแรก เกิดเป็นข้อสรุปหรือหลักเกณฑ์ที่เป็นตัวแทนของความรู้ ซึ่งตัวแทนความรู้นี้จะถูกนำไปเก็บไว้ในกรอบ (Frames) เกิดเป็นความเข้าใจ และถูกนำไปใช้ในการแก้ปัญหาในขั้นตอนสุดท้าย

การพยายามศึกษาการสร้าง ความหมายทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทำให้เราทราบถึงกลไกและเข้าใจความสลับซับซ้อนของกระบวนการสร้างความหมายที่ดำเนินอย่างต่อเนื่องในขณะที่นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยการสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนไม่ได้สิ้นสุดลง ณ ตำแหน่งของความเข้าใจในระดับสูงสุดที่ใช้ในการแก้ปัญหา แต่กระบวนการดังกล่าวยังคงดำเนินไปอย่างต่อเนื่อง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่จัดให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตัวของนักเรียนเอง โดยใช้สื่อหรืออุปกรณ์ที่กระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ จะทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาความคิดและนำองค์ความรู้ไปใช้ได้ดียิ่งขึ้น

ข้อเสนอแนะ

1. ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็น

เครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ จะทำให้นักเรียนเรียนรู้ด้วยความสนใจ กระตือรือร้น แต่อย่าลืมว่า โปรแกรม The Geometer's Sketchpad มีบทบาทเป็นเพียงเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้เท่านั้น ไม่ได้เป็นตัวแทนของครู ดังนั้นครูจะต้องมีบทบาทในการให้คำแนะนำ คอยช่วยเหลือและดำเนินกิจกรรมให้เป็นไปตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อให้นักเรียนได้ใช้โปรแกรม ในการเรียนรู้ อย่างเต็มประสิทธิภาพของโปรแกรม และนักเรียนก็จะสามารถพัฒนาตนเองได้อย่างเต็มความสามารถ

2. หลังจากการสัมภาษณ์และวิเคราะห์ระดับความเข้าใจของนักเรียนพบว่านักเรียนจะมีความเข้าใจเกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วนโดยสามารถหาผลลัพธ์จากการคูณและการหารเศษส่วนได้โดยตรง แต่นักเรียนจะขาดตรงที่ความรู้พื้นฐาน โดยเฉพาะเรื่องเศษส่วนที่เท่ากัน ทำให้นำไปใช้แก้ปัญหาในระดับที่สูงขึ้นไม่ได้ ดังนั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรที่จะเตรียมพื้นฐานความรู้ที่จะใช้ในการสร้างโมเดลใหม่ให้พร้อมก่อนที่จะจัดกิจกรรมการเรียนรู้ใหม่โมเดลใหม่นั้น ๆ รวมทั้งนักเรียนจะไม่ค่อยแก้ปัญหาเกี่ยวกับโจทย์ปัญหาเศษส่วนได้ ดังนั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ควรที่จะเริ่มต้นจากสถานการณ์ที่เป็นปัญหาเศษส่วน และควรเน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเอง

3. ในการทำวิจัยครั้งต่อไปผู้วิจัยควรที่จะศึกษาเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานที่นักเรียนจะนำไปใช้ในการสร้างความรู้เรื่องใหม่ว่าควรจะนำมาใช้ในลักษณะใด และควรจะพัฒนาอย่างไรให้นักเรียนนำมาใช้เป็นพื้นฐานในการสร้างความรู้ใหม่เพื่อให้นักเรียนสามารถพัฒนาตนเองได้มากที่สุด

เอกสารอ้างอิง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). (2548). **แนวคิดเกี่ยวกับโปรแกรม**

The Geometer's Sketchpad (GSP) กับ การเรียนการสอน. กรุงเทพฯ: สสวท.

สุรางค์ ไคว้ตระกูล. (2544). **จิตวิทยาการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). **Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it?**. In (Ed). Educational Studies in Mathematics. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bulgar, S. (2003). **Children's sense-making of division of fractions.** Journal of Mathematical Behavior, 22, 319-334.

NCTM. (2000). **Principles and standards for school mathematics.** Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.