



การศึกษาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในการแก้ปัญหา เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

The Study of Grade 8 Students' Algebraic Thinking in Solving Problems of Factoring One Variable Polynomials of Degree 2

อริสา วงศ์อินตา^{1*} และ หล้า ภวภูตานนท์²

Arisa Wonginta^{1*} and Lha Pavaputanon²

¹ นักศึกษาหลักสูตรศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

Master of Education Program in Educational Mathematics, Faculty of Education, KhonKaen University

² อาจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

Lecturer, Educational Mathematics Program, Faculty of Education, Khon Kaen University

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพมาศึกษาหาคำตอบของงานวิจัย เกี่ยวกับปรากฏการณ์หรือตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ทางการศึกษาโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 การเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วยแบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 หัวข้อ ดังนี้ 1) การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $c = 0$ 2) การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1$ b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0, c \neq 0$ และ 3) การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $a, b \neq 0$ และ $c \neq 0$ จำนวน 7 ข้อ นำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์ตามกรอบแนวคิดของPierce and Stacey (2007)

ผลการวิจัย พบว่าการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนมีลักษณะ ดังนี้ 1) การตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐาน : นักเรียนทราบถึงค่าแต่ละพจน์มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม 2) การกำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง : นักเรียนสามารถมองเห็นโครงสร้างย่อย ที่มีตัวประกอบร่วมกัน และ 3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ : นักเรียนสามารถดึงตัวประกอบร่วมโดยใช้สมบัติการแจกแจง และส่วนใหญ่พบว่า นักเรียนที่เกิดความผิดพลาดในการแยกตัวประกอบของพหุนาม เนื่องจากนักเรียนขาดลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต

คำสำคัญ: การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน การแก้ปัญหาเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

*Corresponding author. Mobile: +66(0)98383 4210

E-mail address: wonginta@hotmail.com

Abstract

This thesis used mixed research methods aim to study of algebraic thinking in solving factorization problem of Polynomial Degree 2 One Variable of grade 8 students. The target group was thirty grade 8 students who were studying in the second semester of academic year 2014, Demonstration School of Khon Kaen University Secondary School. Data collection tools included tests of algebraic thinking on the factorization of polynomial in one variable, which is divided into 3 topics, as follows; 1) the factorization of a polynomial of degree two variables $ax^2 + bx + c$ on a , b is an integer and $c = 0$ 2) factoring polynomials of degree two variables $ax^2 + bx + c = 1$, b , and c is the integer a and $b \neq 0$, $c \neq 0$ and 3) factoring of polynomial in one variable $ax + bx + c$, when a , b , c as integer, and $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. The data were analyzed according to the algebraic concept of Pierce and Stacey (2007).

The research results found:

Showed that the algebraic thinking of the students is characterized as follows; 1) recognizing the fundamental elements and properties: the students know the value of each term with integer coefficients. 2) the identity of the structure: students can see the sub structure with common factor. 3) identification of properties that matter: students can pull the joint assembly using the distribution property. In addition, it was founded that most of the students who made errors on factorization because of the lack of algebraic thinking skill.

Keywords: Algebraic Thinking of Students, Solving Factorization Problem of Polynomial Degree 2 One Variable

บทนำ

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ความเข้าใจของนักเรียนเป็นสิ่งจำเป็นและควรให้ความสำคัญ ด้วยเหตุที่ว่าการที่ครูให้ผู้เรียน เรียนรู้โดยการจดจำหรือท่องจำ จะไม่สามารถช่วยให้นักเรียนนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากขาดความเข้าใจอันเป็นพื้นฐานของการคิดในระดับที่ลึกซึ้ง (อัมพร ม้าคะนอง, 2547) และด้วยเหตุที่ว่าผู้วิจัยได้ทำการศึกษาสำรวจ เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของโรงเรียนอมตวิทยา พบว่านักเรียนมีปัญหาเรื่องการวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนไม่สามารถประยุกต์ความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ และจากการสอบถามครูผู้สอนพบว่า เนื้อหาในเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวค่อนข้างเป็นปัญหาสำหรับผู้เรียน โดยเฉพาะการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ที่มีขั้นตอนวิธีหลายขั้นตอน เช่น กรณีที่ 1. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b เป็น จำนวนเต็ม และ $c = 0$ จะเหลือเพียง $ax^2 + bx$ กรณีที่ 2. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1$, b และ c เป็น จำนวนเต็ม และ $b \neq 0$, $c \neq 0$ จะเหลือเพียง $x^2 + bx + c$ และกรณีที่ 3. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็น จำนวนเต็ม และ $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ ปัญหาของนักเรียนในการเรียนรู้ 1) การแยกตัวประกอบของจำนวนที่เป็นความสัมพันธ์ยังไม่ชัดเจน 2) เมื่อแยกตัวประกอบแล้วไม่แน่ใจในวิธีการคิดว่าถูกหรือผิด และไม่ได้ทำการตรวจสอบคำตอบ จึงทำให้นักเรียนตีความหมายของสิ่งที่เรียนรู้แตกต่างกับความรู้ที่ครูสอน และคิดว่าตัวเองเข้าใจถูกต้องแล้ว

จากเหตุผลดังกล่าวผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะทำวิจัย เรื่อง ศึกษาการคิดเชิงพีชคณิตในการแก้ปัญหา เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว โดยศึกษาจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา

2557 ว่าธรรมชาติการคิดเชิงพีชคณิตในการแก้ปัญหาเป็นอย่างไร เพื่อเป็นข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาหลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นการส่งเสริมการคิดเชิงพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษาต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตในการแก้ปัญหา เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพมาศึกษาหาคำตอบของงานวิจัย เกี่ยวกับปรากฏการณ์หรือตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ทางการศึกษา

1. กลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายในการศึกษาครั้งนี้เป็น นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 30 คน ปีการศึกษา 2557 ภาคเรียนที่ 2 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น สังกัดคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 1. แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 หัวข้อ ดังนี้ 1) การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b เป็น จำนวนเต็ม และ $c = 0$ จะเหลือเพียง $ax^2 + bx$ 2) การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1, b$ และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0, c \neq 0$ จะเหลือเพียง $x^2 + bx + c$ และ 3) การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ จำนวน 7 ข้อ และ 2) แบบสัมภาษณ์เชิงลึกเป็นการสัมภาษณ์นักเรียนหลังการทำแบบทดสอบ เพื่อตรวจสอบวิธีการคิดหรือแนวคิดของนักเรียนในส่วนที่ยังไม่ชัดเจน โดยรอบคำถาม ได้กำหนดตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey (2007)

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลจากการศึกษาเอกสาร และดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว และการสัมภาษณ์เชิงลึก ดังนี้ 1) ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยประชุมร่วมกันเพื่อกำหนดบทบาทหน้าที่ของผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัย 2) ในการเก็บรวบรวมข้อมูลช่วงการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยทำหน้าที่ ให้คำชี้แจงรายละเอียดในการทำแบบทดสอบ

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลจากแบบทดสอบการคิดเชิงพีชคณิต เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ดังนี้

4.1 นำแบบทดสอบการคิดเชิงพีชคณิต เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว มาตรวจสอบวิธีการคิดและความถูกต้องของแบบทดสอบในแต่ละข้อของนักเรียน

4.2 นำแบบทดสอบการคิดเชิงพีชคณิต เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว ที่ผู้วิจัยได้พิจารณาจากแบบทดสอบของนักเรียนในการแบ่งวิธีการคิดของนักเรียนในแต่ละแบบนำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์เพื่ออธิบายคุณลักษณะของการแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey(2007) ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้

1) ตระหนักรูปร่างประกอบและสมบัติพื้นฐาน 2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง 3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ

4.3 นำผลที่ได้จากการวิเคราะห์การคิดเชิงพีชคณิต เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มาเขียนสรุปและอภิปรายผลการวิจัยในครั้งนี้

สรุปและอภิปรายผล

1. สรุปผลการวิจัย

1.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b เป็น จำนวนเต็ม และ $c = 0$ จะเหลือเพียง $ax^2 + bx$ การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวกรณีนี้ ประกอบด้วยข้อคำถาม 2 ข้อ ดังปรากฏในภาพที่ 1

Handwritten work for problem 1a: Factorize $3x^2 + 2x$. The student shows the steps: $3x^2 + 2x = 3x^2 + 2x$, then identifies $3x^2 = 3 \cdot x^2$ and $2x = 2 \cdot x$. They then write $3 = a$ and $2 = b$. Finally, they factor out x to get $x(3x + 2)$.

ภาพที่ 1 การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

1) จากผลการวิเคราะห์ ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนพบว่า นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบได้ถูกต้อง มีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey (2007) ครบทั้ง 3 ลักษณะ คือ (1) ตระหนักรูปร่างประกอบและสมบัติพื้นฐานจะเห็นว่าเมื่อเทียบกับ $ax^2 + bx$ สัมประสิทธิ์คือ $a = 3$ และ $b = 2$ ตามลำดับ (2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง $3x^2 + 2x$ คือ $(3)(x)(x) + (2)(x)$ และ (3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญการดึงตัวประกอบร่วมของ $3x^2 + 2x$ คือ x โดยใช้สมบัติการแจกแจง ซึ่งนักเรียนสามารถแสดงความหมายของสัญลักษณ์ ตัวแปร ในบริบทของปัญหา จัดลำดับและเขียนองค์ประกอบของปัญหาได้ อธิบายถึงโครงสร้างย่อยภายในสัญลักษณ์ ดังปรากฏในภาพที่ 2

b. $5x^2 - 15x$
 $5x(x-3)$
 $x=3, 0$

ภาพที่ 2 การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

2) จากผลการวิเคราะห์ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนพบว่า นักเรียนสามารถแสดงวิธีทำในการแยกตัวประกอบของพหุนามได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey (2007) ทั้ง 3 ลักษณะ คือ (1) ตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐานนักเรียนวงกลมเลข 5 ไว้ คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปร x^2 และ 15 คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปร x (2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง นักเรียนดึงตัวร่วมหาผลคูณของ $15x$ ก่อน ได้ $(5 \times 3)x$ จากนั้น ดึงตัวที่เหมือนกันออกมา คือ $5x$ ซึ่งคูณอยู่กับ $(x-3)$ จึงสามารถแยกตัวประกอบได้ถูกต้องและ (3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ การเข้าใจโครงสร้างในการแยกตัวประกอบ การดึงตัวประกอบร่วมของ $5x^2 - 15x$ คือ $5x$ จึงสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวออกมาได้ถูกต้อง

1.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1$, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$, $c \neq 0$ จะเหลือเพียง $x^2 + bx + c$ การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวกรณีนี้ ประกอบด้วย 2 ข้อดังปรากฏในภาพที่ 3

a. $x^2 + 7x - 18$
 $(x+9)(x-2)$
 $x^2 - 2x + 9x - 18$

ภาพที่ 3 การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

1) จากผลการวิเคราะห์ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนพบว่า นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้อง มีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey (2007) ทั้ง 3 ลักษณะ คือ (1) ตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐานนักเรียนได้แสดงผลคูณค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร c คือ 9 กับ 2 นั้นแสดงว่านักเรียนทราบว่าตัวแปร $c = 18$ (2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง จากภาพ $(x+9)(x-2)$ นักเรียนนำค่าสัมประสิทธิ์ในวงเล็บหน้าคูณกระจายเข้าไปในวงเล็บหลัง ได้ $x^2 - 2x + 9x - 18$ และ (3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ จากการสังเกต นักเรียนทราบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและใช้วิธีการหาผลคูณแล้วนำมาแยกเป็นสองวงเล็บในการแยกตัวประกอบของพหุนาม ซึ่งทำให้การแยกตัวประกอบของพหุนามถูกต้อง การที่นักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตครบทั้ง 3 ลักษณะ จะทำให้นักเรียนมีลักษณะการคิดอย่างมีประสิทธิภาพ ดังปรากฏในภาพที่ 4

ภาพที่ 4 การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

2) จากผลการวิเคราะห์ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนพบว่า นักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey(2007) ทั้ง 3 ลักษณะ (1) ตระหนักรู้องค์ประกอบพื้นฐานนักเรียนทราบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร คือ $c = 56$ แล้วนำมาหาผลคูณ (2) สามารถกำหนดเอกลักษณ์โครงสร้างย่อยของพหุนาม ซึ่งนักเรียนสามารถหาจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับพจน์หลัง (3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ นักเรียนอาศัยแนวคิดจากการคูณของพหุนาม และจะเห็นว่าถ้านักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตครบทั้ง 3 ลักษณะ จะทำให้นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์การแยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้อง

1.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็น จำนวนเต็ม และ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวกรณีนี้ ประกอบด้วยข้อคำถาม 3 ข้อ ดังปรากฏในภาพที่ 5

ภาพที่ 5 การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

1) จากการวิเคราะห์พบว่า นักเรียนมีการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey(2007) ทั้ง 3 ลักษณะ คือ (1) การตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐานนักเรียนหาจำนวนสองจำนวนที่คูณกันได้พจน์หน้าคือ $2x^2$ ซึ่งได้ $2x$ กับ x และ พจน์หลังคือ 12 ซึ่ง 12 คือสัมประสิทธิ์ของตัวแปร c (2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง นักเรียนหาพจน์กลางจนกว่าจะได้ $11x$ ได้ $3x + 8x = 11$ คือ นักเรียนมองเห็นโครงสร้างของความสัมพันธ์ ของค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์หน้า คือ a กับสัมประสิทธิ์ของพจน์หลัง คือ c เมื่อ a กับ c มีความสัมพันธ์กันทำให้เกิดค่าของ b คือ สัมประสิทธิ์ของพจน์กลาง (3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจงโดยการหาผลคูณของพหุนาม จึงสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้อง ดังปรากฏในภาพที่ 6

b. จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $6x^2 + 7x - 20$

$(3x-4)(2x+5)$

วิธี

$$\begin{array}{r} 3x^2 \quad 8 \\ \times \quad 5 \\ \hline 6x^2 + 15x - 5x - 20 \end{array}$$

ภาพที่ 6 ภาพการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

2) จากผลการวิเคราะห์พบว่า นักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของPierce and Stacey (2007) 3 ลักษณะ คือ (1) การตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐานนักเรียนทราบค่าของตัวแปร สามารถหาผลคูณของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรได้(2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้างนักเรียนหาผลคูณของสัมประสิทธิ์ของพจน์หน้าคือ 6 เป็นสองจำนวน คือ 2 กับ 3 และพจน์หลังคือ 20 เป็นสองจำนวน คือ 5 กับ -4 และ (3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ นักเรียนแยกตัวประกอบโดยการหาผลคูณของพหุนาม แล้วใช้หลักการคูณไขว้เพื่อตรวจสอบคำตอบของพจน์กลาง จะเห็นว่าลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตทั้ง 3 ลักษณะ มีความสำคัญทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในการคิดเชิงพีชคณิตที่มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นและเป็นพื้นฐานสำคัญในการต่อยอดของการศึกษาระดับสูงขึ้นไป ดังปรากฏในภาพที่ 7

c. จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $9x^2 - 24x + 16$

$(3x-4)(3x-4)$

วิธี

$$\begin{array}{r} 3x^2 \quad 12 \\ \times \quad 4 \\ \hline 9x^2 - 24x + 16 \end{array}$$

ภาพที่ 7 ภาพการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

3) จากการวิเคราะห์พบว่า นักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey (2007) 3 ลักษณะ คือ (1) การตระหนักรู้องค์ประกอบพื้นฐานนักเรียนทราบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร สามารถนำมาหาผลคูณแยกเป็นสองวงเล็บได้ถูกต้อง (2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง นักเรียนใช้หลักการแยกออกเป็นสองวงเล็บ ได้ กำหนดโครงสร้างการคูณของแต่ละพจน์ จากนั้นคูณไขว้เพื่อตรวจสอบคำตอบของพจน์กลาง (3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญโดยการหาผลคูณของพหุนาม ดังนั้นจะเห็นว่า ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตทั้ง 3 ลักษณะ มีความสำคัญต่อการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว รวมทั้งทักษะกระบวนการคิดและวิธีการเรียบเรียงการแก้ปัญหาให้เป็นระบบอย่างมีประสิทธิภาพ

2. อภิปรายผลการวิจัย

2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b เป็น จำนวนเต็ม และ $c = 0$

ผลการวิจัยพบว่าข้อที่ 1 นักเรียนที่ทำถูกต้องจะมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของPierce and Stacey(2007) ครบทั้ง 3 ลักษณะ คือ 1) ตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐาน (Recognition of Conventions and Basic Properties) 2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง (Identification of Structure) และ 3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ (Identification of Key Features) ซึ่งนักเรียนสามารถแสดงความหมายของสัญลักษณ์ ตัวแปร ในบริบทของปัญหา จัดลำดับและเขียนองค์ประกอบของปัญหาได้ อธิบายถึงโครงสร้างย่อยภายในสัญลักษณ์ข้อที่ 2 นักเรียนสามารถแสดงวิธีทำในการแยกตัวประกอบของพหุนามได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี

ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของPierce and Stacey (2007) ทั้ง 3 ลักษณะ คือ 1) ตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐาน (Recognition of Conventions and Basic Properties) 2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง (Identification of Structure) และ 3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ (Identification of Key Features)นักเรียนมีความเข้าใจและสามารถบอกถึงลักษณะเด่นและคุณสมบัติที่สำคัญของการแยกตัวประกอบ เช่น การหาผลคูณ การตั้งตัวประกอบร่วม รวมทั้งการนำเอกลักษณ์ทางคณิตศาสตร์มาใช้ เพื่ออธิบายโครงสร้างย่อยในการแยกตัวประกอบ ส่งผลให้การคิดของนักเรียนมีประสิทธิภาพ

2.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1, b$ และ c เป็น จำนวนเต็ม และ $b \neq 0, c \neq 0$

ผลการวิจัยพบว่า ข้อที่ 1นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้อง มีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey(2007) ทั้ง 3 ลักษณะ คือ 1) ตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐาน (Recognition of Conventions and Basic Properties) 2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง (Identification of Structure) และ 3) การหาเอกลักษณ์ของคุณสมบัติที่สำคัญ (Identification of Key Features) จากการสังเกตนักเรียนทราบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและใช้วิธีการหาผลคูณแล้วนำมาแยกเป็นสองวงเล็บในการแยกตัวประกอบของพหุนาม ซึ่งทำให้การแยกตัวประกอบของพหุนามถูกต้อง การที่นักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตครบทั้ง 3 ลักษณะ จะทำให้นักเรียนมีลักษณะการคิดอย่างมีประสิทธิภาพ ข้อที่ 2 นักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey(2007) ทั้ง 3 ลักษณะ นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้อง ตระหนักรู้องค์ประกอบพื้นฐาน คือ ทราบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร สามารถกำหนดเอกลักษณ์โครงสร้างย่อยของพหุนาม ซึ่งนักเรียนสามารถหาจำนวนที่คูณกันได้เท่ากับพจน์หลัง โดยอาศัยแนวคิดจากการคูณของพหุนาม และจะเห็นว่าถ้านักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตครบทั้ง 3 ลักษณะ จะทำให้นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์การแยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้องสอดคล้องกับงานวิจัยของณัชชา กมล (2554) ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย ผลการวิจัยพบว่า ทำให้ได้รอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนเป็น 4 ระดับ ในตัวบ่งชี้ เรื่องแบบรูป การคิดของนักเรียนในระดับที่ 1 นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ถัดไปและพจน์ต่างๆ ของแบบรูปได้ ระดับที่ 2 สามารถวิเคราะห์ลักษณะแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่เป็นการวิเคราะห์เพียง 1 มิติ คือการมองค่าของแต่ละพจน์ที่เปลี่ยนไป ระดับที่ 3 นักเรียนสามารถวิเคราะห์ทั้งตำแหน่งของพจน์ในแบบรูปและค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นได้ ระดับที่ 4 นักเรียนสามารถหาข้อสรุปโดยผ่านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของข้อมูลทั้งหมดในแบบรูปได้อย่างชัดเจน

2.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

ผลการวิจัยพบว่า ข้อที่ 1 นักเรียนมีการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey (2007) ทั้ง 3 ลักษณะ คือ 1) การตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐาน (Recognition of Conventions and Basic Properties) นักเรียนทราบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร สามารถหาจำนวนสองจำนวนที่คูณกันแล้วได้ค่าของแต่ละพจน์2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง (Identification of Structure) คือ นักเรียนมองเห็นโครงสร้างของความสัมพันธ์ คือ ทราบถึงโครงสร้างความสัมพันธ์ของค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์หน้า คือ a กับสัมประสิทธิ์ของพจน์หลัง คือ c เมื่อ a กับ c มีความสัมพันธ์กันทำให้เกิดค่าของ b คือสัมประสิทธิ์ของพจน์กลาง 3) การหาเอกลักษณ์คุณสมบัติที่สำคัญ (Identification of Key Features) นักเรียนสามารถแยกตัวประกอบโดยใช้สมบัติการแจกแจงโดยการหาผลคูณของพหุนาม จึงสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามได้ถูกต้องข้อที่ 2นักเรียนมีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตตามกรอบแนวคิดของ Pierce and Stacey (2007) 3 ลักษณะ คือ 1) การตระหนักรู้องค์ประกอบและสมบัติพื้นฐาน (Recognition of Conventions

and Basic Properties) 2) กำหนดเอกลักษณ์ของโครงสร้าง (Identification of Structure) และ 3) การหาเอกลักษณ์คุณสมบัติที่สำคัญ (Identification of Key Features) นักเรียนแยกตัวประกอบโดยการหาผลคูณของพหุนาม แล้วใช้หลักการคูณไขว้เพื่อตรวจสอบคำตอบของพจน์กลาง ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตทั้ง 3 ลักษณะ มีความสำคัญทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในการคิดเชิงพีชคณิตที่มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นและเป็นพื้นฐานสำคัญในการต่อยอดของการศึกษาระดับสูงขึ้นไป ข้อที่ 3 นักเรียนมีการตระหนักรู้องค์ประกอบพื้นฐานโดยการหาผลคูณของพหุนาม นักเรียนใช้หลักการแยกออกเป็นสองวงเล็บ ได้กำหนดโครงสร้างการคูณของแต่ละพจน์ จากนั้นคูณไขว้เพื่อตรวจสอบคำตอบของพจน์กลาง ส่วนแบบที่ 2 นักเรียนได้หาผลคูณของค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนาม แล้วแยกออกเป็นสองวงเล็บ ใช้หลักการคูณไขว้เพื่อตรวจสอบพจน์กลางและให้ความสำคัญกับเครื่องหมายในการคูณของพหุนาม ทำให้นักเรียนได้ผลลัพธ์ในการแยกตัวประกอบออกมาได้อย่างถูกต้องและชัดเจน ดังนั้นจะเห็นว่า ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตทั้ง 3 ลักษณะ มีความสำคัญต่อการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว รวมทั้งทักษะกระบวนการคิดและวิธีการเรียบเรียงการแก้ปัญหาให้เป็นระบบอย่างมีประสิทธิภาพ

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

1.1 จากการสรุปผลการวิจัยลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว จะเห็นว่าการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตทั้ง 3 ลักษณะ มีความสำคัญมาก เพื่อพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

1.2 จากข้อมูลเบื้องต้นของกลุ่มเป้าหมายพบว่าระดับผลการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 อยู่ในระดับที่ดี ส่วนจำนวนนักเรียนที่เกิดความเข้าใจคลาดเคลื่อนมีประมาณร้อยละ 30 ซึ่งคุณครูผู้สอนควรให้ความสำคัญถึงปัญหาในการคิดเชิงพีชคณิต เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวของนักเรียน

2. ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

2.1 จากการวิจัยครั้งนี้พบว่าปัญหาเกี่ยวกับนักเรียนในการคิดเชิงพีชคณิต เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ การแสดงความหมายของสัญลักษณ์ ตัวแปร และการกำหนดเอกลักษณ์ ควรมีการศึกษาย่างเฉพาะเจาะจงเพื่อให้เกิดแนวคิดทางการพัฒนาการคิดของนักเรียน

2.2 จากการวิจัยพบว่าการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวของนักเรียน จากการสังเกตในระหว่างนักเรียนกำลังแก้ปัญหา นักเรียนส่วนมากไม่แสดงวิธีทำอย่างละเอียด แต่นักเรียนก็สามารถหาผลลัพธ์ได้ถูกต้อง จะเห็นว่าการคิดเชิงพีชคณิตครบทั้ง 3 ลักษณะ คือ นักเรียนทราบค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละตัวแปร มองเห็นความสัมพันธ์ของโครงสร้างย่อยแต่ละพจน์ และใช้คุณสมบัติที่สำคัญในการแยกตัวประกอบ ควรมีการศึกษาและพัฒนาให้นักเรียนอธิบายการแสดงวิธีทำอย่างละเอียด จะทำให้เห็นถึงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนอย่างชัดเจน

เอกสารอ้างอิง

- ณัชชา กมล. (2554). การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ (วช.).
- อัมพร ม้าคะนอง. (2547). การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. ใน พร้อมพรรณ อุดมสิน, และอัมพร ม้าคะนอง (บรรณาธิการ). **ประมวลบทความหลักการและแนวการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**. (หน้า 94-109). กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.

Pierce, R., & Stacey, K. (2007). Developing Algebraic Insight. **Mathematics Teaching Incorporating Micromath**, (203), 12-16.

Yackel, E. (1997). A foundation for algebraic reasoning in the early grades. **Teaching Children Mathematics**, 3(6), 276-280.