

องค์ประกอบของคณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี
Components of Mathematics for Children Under 3 Years Old

Received: March 23, 2023

Revised: May 20, 2023

Accepted: June 18, 2023

วิลาศ วูวงศ์*

สวนเด็กสุทธาเวช คณะแพทยศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

Vilas Wuwongse*

Suandeksuddhvej, Faculty of Medicine, Mahasarakham University

Corresponding author, E-mail: vilasw@gmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยเมื่อไม่นานมานี้ในสาขาจิตวิทยาพัฒนาการและการศึกษาปฐมวัยที่ผ่านมาวิจัยแสดงให้เห็นว่าเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีมีความสามารถในการรับรู้และเรียนรู้แนวคิดและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน เช่น ปริมาณ รูปทรง รูปแบบ การนับ การจัดหมวดหมู่ และการสร้างรูปแบบ นอกจากนี้ ยังแสดงให้เห็นว่าทักษะคณิตศาสตร์ในช่วงวัยนี้ไปสู่ความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในโรงเรียนในภายหลัง ดังนั้นสถานพัฒนาเด็กปฐมวัยและครอบครัวจึงควรจัดกิจกรรม การเล่น และกิจวัตรประจำวันเพื่อส่งเสริมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้กับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี บทความนี้เสนอองค์ประกอบสำคัญของคณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี ทั้งที่เป็นแบบแนวคิดและแบบการดำเนินการ โดยอิงจากหลักไมล์ของพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์ของเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี องค์ประกอบแบบแนวคิด ได้แก่ ปริมาณและตัวเลข คุณลักษณะ ปริภูมิสัมพันธ์ ขนาดและปริมาตร รูปแบบ และการเปลี่ยนแปลง ส่วนองค์ประกอบแบบการดำเนินการ ได้แก่ การนับ การสังเกต การจัดหมวดหมู่ การเปรียบเทียบ การสร้างรูปแบบ และการแก้ปัญหา สถานพัฒนาเด็กปฐมวัยและครอบครัวสามารถนำองค์ประกอบเหล่านี้ไปใช้เป็นพื้นฐานในการวางแผนและพัฒนากิจกรรมการเล่น กิจวัตรประจำวัน และหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี

คำสำคัญ: คณิตศาสตร์ / เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี / องค์ประกอบแบบแนวคิด / องค์ประกอบแบบการดำเนินการ

Abstract

Recent research in developmental psychology and early education has shown that children under 3 years old can recognize and learn fundamental mathematical concepts and operations such as quantity, shape, pattern, counting, classification, and patterning. In addition, it has shown that mathematical skills acquired at this age lead to success in mathematics and science learning later in school. As a result, child development centers as well as families should organize activities, play, and daily routines to promote mathematics learning for the children. With reference to the mathematical development milestones of children under 3 years old, this paper proposes important components of mathematics for children under 3 years old that consist of 2 types: concepts and operations. The concept components include quantity and number, attribute, spatial relationship, size and volume, pattern, and change; whereas the operation ones counting, observation, classification, comparison, patterning, and problem-solving. Child development institutions and families can use these components as a foundation for planning and developing activities, play, daily routines, and curricula of mathematics for the children.

Keywords: Mathematics / Children Under 3 Years Old/ Concept Components / Operation Components

บทนำ

คณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี หมายถึง แนวคิด (concept) และการดำเนินการ (operation) ทางคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ติดตัวเด็กมาแต่กำเนิด หรือที่เด็กสามารถเรียนรู้ได้ในช่วง 3 ปีแรกหลังเกิด การวิจัยในห้องปฏิบัติการของเด็กแรกเกิดและทารก พบว่าเด็กนั้นเกิดมาพร้อมกับความสามารถทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นธรรมชาติที่น่าประหลาดใจหลายอย่างด้วยกัน เช่น การรับรู้เชิงจำนวน และการตระหนักรู้เชิงพื้นที่และมิติ Beck and Clarke (2023) ได้นำเสนอการทดลองต่างๆ ที่ได้ดำเนินการมาในช่วง 2 ทศวรรษที่ผ่านมา ที่แสดงผลการทดลองเชิงประจักษ์ว่า เด็กเกิดมาพร้อมกับการรับรู้เรื่องจำนวน (number sense) โดยมีการทดลองของ Xua and Spelke (2000) ที่แสดงว่าเด็กอายุ 6 เดือนมีการรับรู้เรื่องจำนวนจากการมองเห็นจำนวนจุดวงกลมต่างกัน และการทดลองของ Izard et al. (2009) ที่แสดงว่าเด็กทารกแรกเกิด (newborn infant) สามารถรับรู้จำนวนที่ต่างกันได้จากการฟังจำนวนหน่วยเสียง (phoneme) และจากการมองเห็นจำนวนจุดวงกลมบนหน้าจอ การรับรู้เรื่องจำนวนนี้มีมาก่อนที่ทารกจะรู้คำศัพท์เกี่ยวกับจำนวน เช่น “หนึ่ง” “สอง” และ “สาม” หรือตัวเลข เช่น “1” “2” และ “3” นอกจากการรับรู้เรื่องจำนวนแล้วเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปียังรู้เรื่องปริภูมิสัมพันธ์ (spatial relationship) และการคิดเชิงปริภูมิ (spatial thinking) (Chen et al., 2017; Johnson & Moore, 2020)

คณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีเป็นพื้นฐานสำคัญที่ช่วยให้เด็กเรียนรู้และเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ต่อไปในภายภาคหน้า กล่าวคือตั้งแต่ระดับโรงเรียนอนุบาลเป็นต้นไป ทักษะ

คณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีเป็นองค์ประกอบที่สำคัญองค์ประกอบหนึ่งที่กำหนดความสำเร็จของเด็กในการเรียนรู้และการทำงานในอนาคตเมื่อโตขึ้น ด้วยเหตุที่คณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีเป็นแนวคิดและการดำเนินการพื้นฐาน การเรียนการสอนจึงไม่ใช่เป็นการสอนและการฝึกฝนคณิตศาสตร์อย่างเป็นทางการ เช่น การใช้แฟลชการ์ด และใบงาน หรือการสอนให้เด็กจำกฎทางคณิตศาสตร์ แต่เป็นการสอดแทรกถ่ายทอดทักษะแนวคิดและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานเข้าไปในชีวิตหรือกิจวัตรประจำวันและการเล่นของเด็กตั้งแต่เกิด โดยในบางครั้งอาจจะจัดเป็นกิจกรรมหรือประสบการณ์เพื่อการสอนได้ แต่กิจกรรมหรือประสบการณ์ที่จัดนั้นต้องสนุก เหมาะสมกับช่วงวัยพัฒนาการและความสามารถของเด็ก รวมทั้งเปิดโอกาสให้เด็กได้สำรวจและเรียนรู้ด้วยตัวเอง

การจัดประสบการณ์เชิงคณิตศาสตร์ที่หลากหลายและมีคุณภาพสูงสำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี นอกจากจะช่วยสร้างพื้นฐานทางคณิตศาสตร์แล้ว ยังช่วยส่งเสริมสุขภาวะที่ดีให้กับเด็กด้วย แต่เป็นเรื่องน่าเสียดายที่ไม่มีการให้ความสำคัญต่อพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์ของเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี เนื่องจากความเชื่อว่าการเรียนการสอนด้านคณิตศาสตร์นั้นควรเริ่มเมื่อเด็กอายุ 3 ปีขึ้นไป หรือเมื่อเด็กเข้าเรียนอนุบาลแล้ว ทำให้ไม่ค่อยมีการสำรวจและวิจัยเพื่อสนับสนุนและส่งเสริมความสามารถเหล่านี้ของเด็ก คณิตศาสตร์ศึกษาสำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีเป็นสาขาวิชาการที่ยังไม่ได้รับการศึกษาและวิจัยอย่างพอเพียง การสำรวจและค้นคว้าในสาขานี้เป็นเสมือนการเดินทางที่ไม่มีแผนที่นำทาง (Chen et al., 2017)

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตอบ 3 คำถามต่อไปนี้ คำถามที่ 1: ทำไมต้องมีการส่งเสริมการจัดประสบการณ์เชิงคณิตศาสตร์ที่มีคุณภาพสำหรับเด็กที่มีอายุต่ำกว่า 3 ปี คำถามที่ 2: เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีมีพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์อย่างไร และคำถามที่ 3: คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีประกอบด้วยองค์ประกอบอะไรบ้าง โดยการวิเคราะห์จากคำตอบของคำถามที่ 2

เนื้อหา

คำถามที่ 1 : ทำไมต้องมีการส่งเสริมการจัดประสบการณ์เชิงคณิตศาสตร์ที่มีคุณภาพสำหรับเด็กที่มีอายุต่ำกว่า 3 ปี

หลักฐานเชิงประจักษ์จากงานวิจัยทางการรู้คิดแสดงให้เห็นว่า ในช่วง 3 ปีแรกของชีวิต เด็กมีพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์ที่ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น การรับรู้เรื่อง มาก-น้อย ใหญ่-เล็ก รูปแบบ (pattern) และตำแหน่ง (Chen et al., 2017) การจัดกิจกรรมหรือประสบการณ์เชิงคณิตศาสตร์ที่มีคุณภาพสูงและหลากหลายให้กับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีมีความสำคัญและควรส่งเสริม เนื่องจากการช่วยสร้างรากฐานที่แข็งแกร่งสำหรับพัฒนาการด้านการรู้คิด สติปัญญา การเรียนรู้ และสุขภาวะให้กับเด็ก โดยมีรายละเอียดดังนี้:

1. การพัฒนาของสมอง (brain development): ช่วงปฐมวัยเป็นช่วงเวลาที่สำคัญมากสำหรับการพัฒนาสมอง การสอนแนวคิดและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานในช่วงเวลานี้ช่วยกระตุ้นสมอง และช่วยพัฒนาการเชื่อมโยงของเซลล์ประสาท ซึ่งนำไปสู่การเพิ่มประสิทธิภาพการรู้คิด ความจำ ความสนใจ และทักษะการแก้ปัญหา (Institute of Medicine & National Research Council, 2015) ทักษะทางคณิตศาสตร์ระดับปฐมวัย เช่น การนับ การสังเกต การจัดหมวดหมู่ การสร้างรูปแบบ (patterning) และการเปรียบเทียบ ช่วยให้ทารกและเด็กเล็กพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพื้นที่และมิติ ซึ่งมีความสำคัญต่อความสำเร็จในการเรียนวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ และคณิตศาสตร์ (STEM) ในการทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ปฐมวัย เด็กต้องเก็บข้อมูลไว้ในหน่วยความจำปฏิบัติงาน (working memory) ซึ่งเป็นความสามารถในการเก็บ

และจัดการข้อมูลในใจในช่วงเวลาสั้นๆ และเป็นทักษะพื้นฐานที่สำคัญทักษะหนึ่งของหน้าที่ปฏิบัติการกิจ (executive function, EF) การมีส่วนร่วมในกิจกรรมคณิตศาสตร์ปฐมวัย ช่วยส่งเสริมสมรรถนะของหน่วยความจำปฏิบัติงานของเด็ก นอกจากนี้ กิจกรรมคณิตศาสตร์ปฐมวัยยังช่วยให้เด็กเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหา เช่น การหาวิธีนับวัตถุ การจัดหมวดหมู่ และการสร้างรูปแบบ ด้วยการฝึกฝนทักษะเหล่านี้ เด็กจะพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา ซึ่งมีความสำคัญต่อความสำเร็จในหลายๆ ด้านของชีวิต

2. ความมั่นใจ และการเห็นคุณค่าในตนเอง (self-esteem) (Nabila & Widjanti, 2020): การสอนแนวคิดและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานให้กับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี สามารถช่วยให้เด็กสร้างความมั่นใจและการเห็นคุณค่าในตนเอง เนื่องจากเด็กได้เรียนรู้แนวคิดและทักษะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต่อการเข้าใจและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เมื่อเด็กเข้าใจและสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ เด็กจะพัฒนาความรู้สึกของความสำเร็จและความมั่นใจว่าสามารถเรียนรู้และเข้าใจคณิตศาสตร์ได้ มีความสามารถที่จะจัดการกับเรื่องท้าทายต่างๆ ได้ บางแนวคิดและบางทักษะทางคณิตศาสตร์เป็นเรื่องยากที่จะเข้าใจ เด็กอาจจะต้องลองผิดลองถูกหลายครั้งกว่าจะเข้าใจหรือทำสำเร็จ ประสบการณ์ลักษณะเช่นนี้ช่วยสร้างความพากเพียร (perseverance) และกรอบความคิดแบบเติบโต (growth mindset) ให้กับเด็ก ส่งผลให้เด็กเชื่อว่าความสามารถและความเฉลียวฉลาดสามารถพัฒนาได้จากการฝึกฝนและความทุ่มเท

3. ความสำเร็จในการเรียนในโรงเรียน (success at learning at school): ทักษะทางคณิตศาสตร์ในช่วงปฐมวัยมีส่วนช่วยให้เด็กประสบความสำเร็จในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่นๆ ในภายหลัง เด็กที่มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ดีตั้งแต่อายุน้อย จะมีความพร้อมที่ดีกว่าในการรับมือกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น ซึ่งเด็กจะต้องเผชิญในโรงเรียนเมื่อโตขึ้น คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือพื้นฐานที่มีอิทธิพลต่อการส่งเสริมพัฒนาการด้านการรู้คิด (cognitive development) รวมถึงทักษะการแก้ปัญหา และการใช้เหตุผลเชิงตรรกะ (logical reasoning) ประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ปฐมวัยช่วยให้เด็กพัฒนาทักษะเหล่านี้ซึ่งจำเป็นต่อความสำเร็จในโรงเรียนและในอื่นๆ คณิตศาสตร์เป็นวิทยาการที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่อยู่รอบตัวเรา การให้เด็กสำรวจสิ่งรอบตัวไปพร้อมกับการเรียนรู้แนวคิดและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เป็นวิธีที่สนุกและน่าสนใจสำหรับเด็กในการเรียนรู้เกี่ยวกับโลกรอบตัว และการกระตุ้นความอยากรู้อยากเห็น นอกจากนี้ การสำรวจในวิชาคณิตศาสตร์ตั้งแต่อายุน้อยเช่นนี้ สามารถช่วยให้เด็กพัฒนาความรักในการเรียนรู้และมีทัศนคติที่ดีต่อโรงเรียน Aubrey et al. (2006) สรุปจากงานวิจัยที่ได้ดำเนินการว่า เด็กที่มีความรู้ทางคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ไม่ดีพอในช่วงเริ่มต้น มีแนวโน้มที่จะไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนเท่าที่ควรในระดับประถมศึกษา หรือในระดับการศึกษาที่สูงกว่านั้น

4. ทักษะในชีวิตประจำวัน (daily living skills): คณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของชีวิตประจำวัน เช่น การนับสิ่งของ การรู้จักปริมาณมากหรือน้อย และการรู้จักน้ำหนักเบาหรือหนัก การสอนคณิตศาสตร์ให้กับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีสามารถช่วยให้เด็กพัฒนาทักษะที่จำเป็นต่อการใช้ชีวิตประจำวันอย่างมีประสิทธิภาพในสังคมโลกนี้ คณิตศาสตร์ยังเกี่ยวข้องกับการทำความเข้าใจและจัดการกับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่และมิติ ตัวอย่างเช่น เด็กสามารถเรียนรู้วิธีการเปรียบเทียบขนาด รูปทรง และตำแหน่งของวัตถุโดยการเล่นตบลูกหรือตัวต่อ สิ่งเหล่านี้สามารถช่วยให้เด็กพัฒนาการรับรู้เชิงปริภูมิสัมพันธ์ ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญสำหรับงานประจำวัน เช่น การจัดของลงในกระเป๋ หรือการจัดระเบียบสิ่งของบนชั้นวาง เป็นต้น

5. การคิดเชิงวิพากษ์ (critical thinking): คณิตศาสตร์ต้องใช้ทักษะการคิดเชิงวิพากษ์ ซึ่งรวมถึงการแก้ปัญหา การวิเคราะห์ และการใช้เหตุผล การสอนแนวคิดและการดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์

ให้กับทารกและเด็กเล็ก จึงมีผลอย่างมีนัยสำคัญต่อพัฒนาการด้านทักษะการคิดเชิงวิพากษ์ การทำกิจกรรม และการเล่นง่ายๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น การให้เด็กจัดหมวดหมู่สิ่งของตามขนาดหรือสี เล่นต่อบล็อกหรือต่อของเล่น หรือจดจำและจัดเรียงรูปแบบนั้น เปิดโอกาสให้เด็กเล็กได้เรียนรู้ทักษะการแก้ปัญหา ทักษะการตระหนักรู้ด้านปริภูมิสัมพันธ์ซึ่งเป็นความสามารถในการเข้าใจและตีความความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุในปริภูมิ และทักษะการใช้เหตุผลเชิงตรรกะ ทักษะเหล่านี้ล้วนเป็นพื้นฐานที่นำไปสู่การสร้างทักษะการคิดเชิงวิพากษ์ การเริ่มต้นเรียนรู้ทักษะพื้นฐานเหล่านี้ตั้งแต่เนิ่นๆ จะช่วยให้เด็กสามารถพัฒนาทักษะการคิดเชิงวิพากษ์ได้โดยง่าย และนำไปใช้ในทุกด้านของชีวิต

6. ความคิดสร้างสรรค์ (creativity): คณิตศาสตร์ไม่ใช่เป็นเพียงวิชาที่ใช้เพื่อแก้ปัญหา แต่ยังเกี่ยวกับความคิดสร้างสรรค์และการสำรวจแนวคิดใหม่ๆ การสอนคณิตศาสตร์ให้กับทารกและเด็กเล็ก สามารถช่วยส่งเสริมความอยากรู้อยากเห็นและความคิดสร้างสรรค์ของเด็ก เช่น การสอนหรือการจัดกิจกรรมเกี่ยวกับรูปทรง ขนาด และปริภูมิ จะช่วยให้เด็กพัฒนาความเข้าใจว่าสิ่งต่าง ๆ เข้ากันได้อย่างไร และเกี่ยวข้องกันอย่างไรในปริภูมิ ความเข้าใจนี้ช่วยเพิ่มความสามารถของเด็กในการคิดอย่างสร้างสรรค์เกี่ยวกับการจัดวัตถุในปริภูมิ หรือการสอนรูปแบบและการสร้างรูปแบบ จะช่วยกระตุ้นให้เด็กใช้จินตนาการเพื่อสร้างรูปแบบใหม่ ๆ ของตนเอง

7. ทักษะภาษา (language): การสอนแนวคิดทางคณิตศาสตร์พื้นฐานให้กับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี ไม่ใช่เป็นการสอนการนับหรือการคำนวณโดยตรงแบบในโรงเรียน แต่เป็นการสอนโดยผ่านปฏิสัมพันธ์ระหว่างเด็กกับผู้ใหญ่ ซึ่งมีการใช้ภาษา ทำให้สามารถช่วยพัฒนาคำศัพท์และทักษะในการสื่อสารให้กับเด็กได้ มีคนจำนวนไม่น้อยกังวลว่าการส่งเสริมพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์ปฐมวัย จะทำให้มีเวลาในการพัฒนาด้านภาษาน้อยลง แต่โดยแท้จริงแล้วไม่จำเป็นต้องเป็นเช่นนั้น การพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์พื้นฐานและทักษะทางภาษานั้นเกี่ยวพันกัน และสามารถพัฒนาทักษะทั้งสองไปพร้อมกันได้อย่างเป็นธรรมชาติ เนื่องจากเด็กพัฒนาการเรียนรู้คณิตศาสตร์และภาษาในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน กล่าวคือ ทักษะด้านภาษาของเด็กตั้งแต่วัยทารกจะพัฒนาขึ้นตามลำดับ โดยการเพิ่มจำนวนคำศัพท์ แล้วจึงพูดประโยคที่ยาวและซับซ้อนขึ้น ในทำนองเดียวกัน ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ปฐมวัย เด็กเริ่มเรียนรู้การแสดงแนวคิดและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานด้วยคำศัพท์ง่ายๆ แล้วจึงเรียนรู้คณิตศาสตร์ในโลกรอบตัวของเด็กด้วยจำนวนคำศัพท์ที่มากขึ้น และเมื่อเวลาผ่านไป เด็กจะเรียนรู้วิธีแสดงแนวคิดและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ด้วยคำศัพท์และประโยคที่ซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งเกี่ยวข้องกับการวัด รูปทรง และการใช้เหตุผล ในความเป็นจริง เมื่อมีการสอนคณิตศาสตร์ควบคู่กับวิชาอื่นๆ เช่น การอ่าน เด็กจะเรียนรู้คณิตศาสตร์มากกว่าที่จะเรียนแต่คณิตศาสตร์อย่างเดียว (National Research Council, 2009) ทักษะทางคณิตศาสตร์ปฐมวัยเป็นตัวทำนายที่แม่นยำที่สุดว่า เด็กจะประสบความสำเร็จทั้งด้านภาษาและด้านคณิตศาสตร์ในอนาคตหรือไม่ (Clements & Sarama, 2021)

คำถามที่ 2: เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีมีพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์อย่างไร

ในช่วง 3 ปีแรกหลังเกิด เด็กมีพัฒนาการทักษะด้านคณิตศาสตร์ตามลำดับตามช่วงวัย เฉกเช่นเดียวกับพัฒนาการทักษะด้านร่างกายที่เปลี่ยนจากการนอนหงาย มาเป็นนอนคว่ำ คลาน นั่ง ยืน และเดินได้ในที่สุด เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีพัฒนาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ผ่านประสบการณ์ในชีวิตประจำวัน เช่น การสำรวจสภาพแวดล้อม และการมีปฏิสัมพันธ์กับพ่อแม่ ครู หรือผู้ดูแลเด็ก การเข้าใจลำดับขั้นของพัฒนาการทักษะด้านคณิตศาสตร์ของเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี จะช่วยกำหนดเนื้อหาของแนวคิดและ

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานที่เหมาะสมต่อการส่งเสริมให้กับเด็กในช่วงวัยนั้น กล่าวคือ ไม่ยากและ
ไม่ง่ายเกินไป

ในการเรียนรู้และสังเกตหลักไมล์ของพัฒนาการทักษะด้านคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุต่ำกว่า 3 ปี
นั้น นักวิจัยได้ใช้วิธีการต่างๆ หลายวิธี รวมถึงการทดลองทางพฤติกรรม และเทคนิคประมวลผลภาพสมอง
ตัวอย่างเช่น การวิจัยพบว่า เมื่อสมองของเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีทำงานเกี่ยวข้องกับการประมวลผลตัวเลข เช่น
การแยกแยะระหว่างปริมาณของวัตถุต่างๆ สมองจะแสดงรูปแบบของการทำงานเฉพาะอย่างที่แตกต่างกันจาก
เวลาที่สมองไม่ได้ทำงาน (Izard et al., 2009) ปรากฏการณ์นี้สามารถใช้เพื่อตรวจดูว่าสมองของเด็กกำลัง
ทำงานตามที่คาดการณ์ไว้หรือไม่

หลักไมล์ของพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์ของเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีที่นักวิจัยตรวจสอบและสังเกตได้
สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ทักษะทางคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุ 0 ถึง 12 เดือน (Mrs. Myers' Learning Lab, 2021)

0 ถึง 4 เดือน

- สามารถบอกความแตกต่างระหว่างรูปภาพที่มี 2 จุด กับรูปภาพที่มี 3 จุดได้
- แสดงความประหลาดใจเมื่อตุ๊กตากระโดดถี่กว่าปกติ
- สังเกตขนาด รูปทรง และสีของวัตถุ

5 ถึง 6 เดือน

- สามารถเห็นความแตกต่างระหว่างน้ำเต็มแก้ว กับน้ำครึ่งแก้ว
- แสดงความประหลาดใจที่เห็นของเล่น 3 ชิ้น ทั้งที่ควรจะมีเพียง 2 ชิ้นเท่านั้น ช่วงวัยนี้เป็นช่วงเวลา
ที่ทักษะการวิเคราะห์และเปรียบเทียบพัฒนาขึ้น

7 ถึง 12 เดือน

- นำสิ่งของที่มีอยู่ใกล้ตัวมาประกอบกันเข้า
- สามารถวางบล็อกซ้อนกันให้สูงขึ้น หรือวางตุ๊กตาซ้อนกันภายในหลายๆ ชั้น
- ตั้งแต่อายุ 9 เดือน สามารถแยกความแตกต่างระหว่างของเล่น 2 ชุดใหญ่ได้ แม้ว่าชุดของเล่น 2 ชุด
นั้น จะมีจำนวนเกือบเท่ากันก็ตาม ตัวอย่างเช่น เด็กอาจสังเกตเห็นว่าชุดของเล่น 8 ชิ้นแตกต่างจาก
กลุ่มของเล่น 10 ชิ้น

2. ทักษะทางคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุ 12 ถึง 36 เดือน (Clements & Sarama, 2007; Mix &

Cheng, 2012)

12 ถึง 18 เดือน

- จดจำและเรียกชื่อรูปทรงพื้นฐาน เช่น วงกลม และสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- เริ่มจัดกลุ่มวัตถุตามขนาดหรือสี
- เริ่มเข้าใจแนวคิดของ "มากขึ้น" และ "น้อยลง"
- เริ่มเข้าใจการนับอย่างง่าย โดยชี้ไปที่วัตถุในขณะที่พูดว่า "หนึ่ง" หรือ "สอง"

18 ถึง 24 เดือน

- รู้จักและเรียกชื่อรูปทรงที่ซับซ้อนมากขึ้น เช่น สามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยมผืนผ้า
- เริ่มจัดกลุ่มวัตถุเป็นหมวดหมู่ที่เฉพาะเจาะจงมากขึ้น เช่น ตามรูปทรง หรือตามสี
- เข้าใจแนวคิดของ "เหมือน" และ "แตกต่าง"

- เริ่มนับหนึ่งถึงสามหรือสี่

24 ถึง 30 เดือน

- นับหนึ่งถึงสามหรือสี่ได้เป็นอย่างน้อย บางครั้งอาจจะนับข้ามหรือนับซ้ำ แต่เริ่มเข้าใจแนวคิดพื้นฐานของการนับ
- เริ่มเข้าใจว่าตัวเลขแสดงถึงจำนวน
- เริ่มเข้าใจความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งและเชิงพื้นที่พื้นฐาน เช่น ขึ้น-ลง เข้า-ออก และเปิด-ปิด
- จัดกลุ่มและจัดหมวดหมู่วัตถุตามรูปร่าง ขนาด หรือสี
- เริ่มเข้าใจแนวคิดของการบวกและการลบจำนวนเล็กน้อย เช่น การเพิ่มบล็อกอีก 1 บล็อกในชั้นบล็อก หรือการนำบล็อก 1 บล็อกออกจากชั้นบล็อก
- เริ่มเปรียบเทียบขนาดหรือน้ำหนักของวัตถุ และเข้าใจแนวคิดต่างๆ เช่น ใหญ่-เล็ก หนัก-เบา
- สามารถจัดคู่อุปกรณ์ต่างๆ เช่น สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยมผืนผ้า และวงกลม ให้เข้ากับรูปร่างของช่องว่างได้
- สามารถระบุรูปแบบ (pattern) ง่ายๆ เช่น "แดง-น้ำเงิน-แดง-น้ำเงิน" และอาจสานต่อรูปแบบที่เริ่มไว้ได้

30 ถึง 36 เดือน

- นับหนึ่งถึงห้าได้เป็นอย่างน้อย และนับได้ถูกต้องมากขึ้น รวมทั้งอาจสามารถออกเสียงคำนับพร้อมกับการนับได้
- สามารถจดจำและเรียกชื่อตัวเลขบางตัวได้ เช่น "1" หรือ "2" โดยเฉพาะอย่างยิ่งหากกิจกรรมตัวเลขนั้น เป็นส่วนหนึ่งของกิจวัตรประจำวัน
- เริ่มจัดกลุ่มวัตถุตามสี รูปร่าง ขนาด หรือคุณสมบัติอื่นๆ และอาจเริ่มเข้าใจประเภทของหมวดหมู่ง่ายๆ เช่น "ใหญ่" และ "เล็ก" เป็นต้น
- เริ่มเปรียบเทียบวัตถุตามขนาด ความยาว น้ำหนัก หรือคุณสมบัติอื่นๆ และอาจใช้ภาษาเปรียบเทียบง่ายๆ เช่น "อันนี้ใหญ่กว่าอันนั้น"
- เริ่มพัฒนาความเข้าใจที่ดีขึ้นเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ เช่น ขึ้น-ลง เข้า-ออก และบน-ล่าง และอาจใช้คำเหล่านี้เพื่ออธิบายการกระทำและการเล่นของตัวเอง
- เริ่มรู้จักและสร้างรูปแบบง่ายๆ เช่น การสลับสีหรือรูปร่าง และอาจเริ่มเข้าใจลำดับง่ายๆ เช่น "ที่หนึ่ง ที่สอง ที่สาม" เป็นต้น

หลักไมล์ของการพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์ของเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีที่กล่าวข้างต้นทั้งหมดนั้นเป็นภาพรวม ไม่จำเป็นที่เด็กทุกคนจะต้องมีพัฒนาการตามหลักไมล์ที่สรุปมา เด็กแต่ละคนมีพัฒนาการตามคุณลักษณะของตนเอง เด็กบางคนอาจมีพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์เร็วหรือช้ากว่าเด็กคนอื่น สิ่งที่สำคัญที่สุดคือ การเปิดโอกาสให้เด็กสำรวจและเรียนรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์อย่างสนุกสนานและมีส่วนร่วม ผ่านกิจกรรมต่างๆ เช่น เกมนับเลข ปริศนารูปทรง และต่อบล็อก เป็นต้น

คำถามที่ 3: องค์ประกอบของคณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี ประกอบด้วยอะไรบ้าง

จากหลักไมล์ของการพัฒนาการด้านคณิตศาสตร์ของเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี จะสังเกตได้ว่าทารก เด็กวัยหัดเดิน และเด็กอายุ 2 ปีนั้นรับรู้เรื่องแนวคิด (concept) ต่อไปนี้

- จำนวนของวัตถุและตัวเลข เช่น ความแตกต่างระหว่างรูปภาพที่มี 2 จุด กับรูปภาพที่มี 3 จุด และตัวเลข เช่น "1" หรือ "2"
- ลักษณะต่างๆ ของวัตถุหรือสิ่งของ เช่น ขนาด รูปทรง และสีของวัตถุ และสิ่งของที่ "เหมือน" และ "แตกต่าง"
- พื้นที่และตำแหน่ง เช่น บน-ล่าง เข้า-ออก และเปิด-ปิด
- ขนาด ปริมาณ และปริมาตรของวัตถุหรือสิ่งของ เช่น ใหญ่-เล็ก หนัก-เบา และความแตกต่างระหว่างน้ำเต็มแก้ว กับน้ำครึ่งแก้ว
- รูปแบบที่เกิดซ้ำๆ เช่น รูปแบบ "แดง-น้ำเงิน-แดง-น้ำเงิน"
- การเปลี่ยนแปลง เช่น บล็อกเพิ่มขึ้นหรือลดลงในชั้นบล็อกที่ซ้อนกันอยู่ และน้ำในแก้วเพิ่มขึ้นหรือลดลง

นอกจากเรื่องแนวคิดแล้ว เด็กยังรับรู้เรื่องการดำเนินการ (operation) ต่อไปนี้

- นับวัตถุหรือสิ่งของ เช่น เริ่มนับอย่างง่ายโดยชี้ไปที่วัตถุในขณะที่พูดว่า "หนึ่ง" หรือ "สอง" และเริ่มนับหนึ่งถึงสามหรือสี่เมื่อใดที่ขึ้น
- สังเกตลักษณะต่างๆ ของวัตถุหรือสิ่งของ เช่น สังเกตขนาด รูปทรง และสีของวัตถุ และแสดงความประหลาดใจเมื่อตึกตากระโดดถี่กว่าปกติ
- แยกประเภทและจัดกลุ่มวัตถุหรือสิ่งของ เช่น จัดกลุ่มวัตถุตามขนาด สี รูปทรง หรือคุณสมบัติอื่นๆ
- เปรียบเทียบลักษณะของวัตถุหรือสิ่งของ เช่น เห็นความแตกต่างระหว่างน้ำเต็มแก้ว กับน้ำครึ่งแก้ว และเปรียบเทียบวัตถุตามขนาด ความยาว น้ำหนัก หรือคุณสมบัติอื่นๆ
- สร้างรูปแบบที่ซ้ำๆ เช่น สร้างรูปแบบง่ายๆ อย่างเช่น การสลับสีหรือรูปทรง "แดง-น้ำเงิน-แดง-น้ำเงิน"
- ดำเนินการหรือแก้ปัญหา เช่น วางวัตถุลงตรงช่องที่มีรูปทรงเดียวกับวัตถุนั้น หรือบวก-ลบเลขง่ายๆ

ข้อมูลดังกล่าวข้างต้น องค์ประกอบของคณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี สามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ประเภทที่เป็นแนวคิด (concept) และประเภทที่เป็นการดำเนินการ (operation) โดยที่ประเภทแนวคิดมี 6 องค์ประกอบต่อไปนี้

C1 ปริมาณและตัวเลข (quantity and number) ในทางคณิตศาสตร์ “ปริมาณ” หมายถึง จำนวนของวัตถุในเซตหนึ่ง เป็นคุณลักษณะของเซตของวัตถุที่สามารถเปรียบเทียบ วัด หรือปรับเปลี่ยนได้ (NCTM, 2000) และเป็นแนวคิดพื้นฐานที่เด็กอายุ 3-4 เดือนเริ่มรับรู้ได้ โดยสามารถรับรู้ความแตกต่างและแยกแยะกลุ่มวัตถุที่มีปริมาณมากและน้อยได้ ถึงแม้ว่าจะยังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ว่าปริมาณหมายถึงอะไร เมื่อเด็กพัฒนาและเติบโตขึ้น เด็กจะต่อยอดจากพื้นฐานนี้และพัฒนาความเข้าใจที่ซับซ้อนมากขึ้นเกี่ยวกับปริมาณ แนวคิด และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อื่นๆ เช่น การนับ การเปรียบเทียบ การคำนวณเบื้องต้น เช่น การบวกและการลบ

ส่วน “ตัวเลข” หมายถึง สัญลักษณ์หรือคำที่ใช้แทนปริมาณ (NCTM, 2000) เป็นความคิดเชิงนามธรรมที่ใช้เพื่ออธิบายจำนวนสิ่งของที่มีอยู่ เช่น มีมะม่วงกี่ลูกในตะกร้า หรือคนมีนิ้วกี่นิ้ว เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี เริ่มพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับตัวเลขผ่านประสบการณ์ประจำวัน เช่น การนับสิ่งของ หรือการจำตัวเลขบนสัญลักษณ์และฉลาก ในช่วงวัยนี้ เด็กอาจยังไม่เข้าใจความหมายของตัวเลขอย่างถ่องแท้ แต่ก็กำลังเริ่ม

พัฒนาความสามารถในการจดจำและดำเนินการกับตัวเลขเหล่านั้น เมื่อทักษะทางภาษาได้พัฒนาแล้ว เด็กจะสามารถเรียนรู้ที่จะเชื่อมโยงคำที่ใช้แสดงจำนวนให้เข้ากับปริมาณ และใช้สัญลักษณ์เพื่อแทนปริมาณเหล่านั้นได้

C2 คุณลักษณะ (attribute) หมายถึง ลักษณะหรือคุณสมบัติของวัตถุหรือสิ่งของที่สามารถใช้อธิบายหรือจำแนกประเภทวัตถุหรือสิ่งของได้ (NCTM, 2000) ตัวอย่างของคุณลักษณะได้แก่ ขนาด รูปทรง สี หรือพื้นผิว เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีเรียนรู้เกี่ยวกับคุณลักษณะทางคณิตศาสตร์ผ่านประสบการณ์ประจำวัน และการมีปฏิสัมพันธ์กับโลกรอบตัว เด็กเริ่มสังเกตและสำรวจคุณลักษณะของวัตถุ เช่น สี รูปทรง ขนาด และพื้นผิว และโดยผ่านการเล่นและการสำรวจ เด็กจะเริ่มพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับคุณลักษณะของวัตถุและวิธีที่สามารถใช้จำแนกและจัดกลุ่มสิ่งต่างๆ ได้ ตัวอย่างเช่น เด็กอาจจัดกลุ่มของเล่นตามสี จัดกลุ่มบล็อกตามขนาด หรือจับคู่ถุงเท้าตามลวดลาย เมื่อเด็กมีพัฒนาการทักษะด้านภาษาดีขึ้น เด็กจะสามารถเรียนรู้การตั้งชื่อและอธิบายคุณลักษณะที่ซับซ้อนมากขึ้น เช่น "เป็นจุด" "เป็นลายเส้น" "โค้ง" และ "ตรง" เป็นต้น นอกจากนี้ยังสามารถเริ่มสร้างรูปแบบตามคุณลักษณะ เช่น บล็อกสีแดงและสีน้ำเงินสลับกัน

C3 ปริภูมิสัมพันธ์ (spatial relationship) หมายถึง ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่ง (position) และทิศทาง (orientation) ของวัตถุหรือรูปทรงในปริภูมิ เช่น บล็อกสีแดงอยู่บนบล็อกสีน้ำเงิน หรือตุ๊กตาด้านหน้าไปทางโน้น-หันหน้ามาทางนี้ เป็นต้น สำหรับเด็กเล็กปริภูมิสัมพันธ์มีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ปฐมวัย เนื่องจากการวางรากฐานสำหรับแนวคิดต่างๆ เช่น การวัด เรขาคณิต และการแก้ปัญหา การพัฒนาการรับรู้เรื่องปริภูมิสัมพันธ์เป็นรากฐานสำคัญสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในอนาคต (Uttal et al., 2013) เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีพัฒนาการรับรู้เรื่องปริภูมิสัมพันธ์ผ่านประสบการณ์ทางประสาทสัมผัสและการสำรวจสภาพแวดล้อม เช่น การเอื้อมจับสิ่งของ การคลาน และการเดิน กิจกรรมการเล่นที่เกี่ยวข้องกับการใช้เหตุผลเชิงปริภูมิ เช่น การเล่นต่อบล็อก ปริศนา และการประกอบหรือเคลื่อนของเล่นก็สามารถช่วยสนับสนุนพัฒนาการด้านนี้ได้ เมื่อเด็กเติบโตและเคลื่อนไหวได้มากขึ้น เด็กก็จะเริ่มสำรวจสิ่งรอบตัวโดยขยับร่างกายและจัดการกับวัตถุต่างๆ จากประสบการณ์เหล่านี้ เด็กจะพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับปริภูมิสัมพันธ์พื้นฐาน

แนวคิดหลักบางประการเกี่ยวกับปริภูมิสัมพันธ์ที่เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีสามารถเรียนรู้ได้ ได้แก่

- ตำแหน่ง: เข้าใจตำแหน่งของวัตถุที่เกี่ยวข้องกับตนเองหรือวัตถุอื่นๆ เช่น ขึ้น-ลง เข้า-ออก สูง-ต่ำ และเปิด-ปิด
- ทิศทาง: เข้าใจทิศทางของวัตถุที่เกี่ยวข้องกับตนเองหรือวัตถุอื่นๆ เช่น ซ้าย-ขวา เดินหน้า-ถอยหลัง และตามเข็มนาฬิกา-ทวนเข็มนาฬิกา
- ระยะทาง: เข้าใจระยะห่างระหว่างตนเองกับวัตถุอื่นๆ เช่น ใกล้-ไกล ใกล้ชิด-ห่างไกล และยาว-สั้น
- รูปทรง: เข้าใจเกี่ยวกับรูปทรงของวัตถุ เช่น กลม-สี่เหลี่ยม แบน-นูน และสูง-เตี้ย

C4 ขนาดและปริมาตร (size and volume) ในคณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี ขนาดและปริมาตร หมายถึง การเปรียบเทียบวัตถุหรือปริมาณของวัตถุตามขนาดทางกายภาพตามที่เด็กเห็น โดยไม่คำนึงหรืออ้างอิงถึงค่าตัวเลขใดๆ เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีสามารถเริ่มพัฒนาความเข้าใจเรื่องขนาดและปริมาตรผ่านการสำรวจและเล่นกับวัตถุที่มีขนาดต่างกัน ตัวอย่างเช่น การเล่นบล็อกขนาดต่างๆ จะช่วยให้เด็กเรียนรู้ที่จะเปรียบเทียบขนาดต่างๆ ได้ เด็กสามารถเรียงบล็อกจากใหญ่ไปหาเล็ก หรือจัดกลุ่มตามขนาดของบล็อก การใช้คำเช่น "ใหญ่" และ "เล็ก" เพื่ออธิบายขนาดของบล็อกสามารถช่วยเด็กพัฒนาคำศัพท์และความเข้าใจเกี่ยวกับ

แนวคิดเรื่องขนาดได้ นอกจากนี้ กิจกรรมต่างๆ เช่น การแยกประเภทวัตถุตามขนาด การวัดที่ไม่ได้ใช้ตัวเลขหรือหน่วยวัด (เช่น การวัดโดยการเปรียบเทียบความยาวของสีกา 2 แท่ง หรือความสูงของตุ๊กตา 2 ตัว) และการเล่นต่อจิ๊กซอว์ที่ต้องใช้วัตถุขนาดเดียวกันเข้าคู่กันก็สามารถช่วยเด็กให้พัฒนาความเข้าใจเรื่องขนาดและปริมาตรได้

มีงานวิจัยที่แสดงให้เห็นว่าการรับรู้เกี่ยวกับแนวคิดเรื่องขนาดและปริมาตรในวัยเด็กเล็กมีผลกระทบเชิงบวกต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทางคณิตศาสตร์ของเด็กในภายหลัง (Libertus et al., 2011) ดังนั้นจึงเป็นเรื่องสำคัญสำหรับผู้ปกครองและผู้ดูแลเด็กที่จะต้องให้โอกาสเด็กเล็กในการพัฒนาความเข้าใจเรื่องขนาดด้วยวิธีที่สนุกสนานและมีส่วนร่วม NAEYC (2009) แนะนำว่าผู้ปกครองและผู้ดูแลเด็กสามารถส่งเสริมความเข้าใจของเด็กเกี่ยวกับเรื่องขนาดและปริมาตรได้ โดยให้เด็กทำกิจกรรมที่มีการเปรียบเทียบความแตกต่างของวัตถุที่มีขนาดต่างกัน และโดยการใช้ภาษาบรรยายเพื่อระบุและอธิบายแนวคิดเรื่องขนาดและปริมาตร

C5 รูปแบบ (pattern) หมายถึง ลำดับของวัตถุ รูปทรง สี เสียง การเคลื่อนไหว หรือเหตุการณ์ที่คาดเดาได้ที่เกิดขึ้นซ้ำๆ ในลักษณะที่จดจำได้ รูปแบบสามารถมองเห็นได้ เช่น ลำดับของรูปทรงหรือสี หรือการได้ยิน เช่น จังหวะหรือทำนองซ้ำๆ การทำความเข้าใจรูปแบบเป็นรากฐานสำคัญสำหรับการพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากจะช่วยให้เด็กพัฒนาความสามารถในการระบุและขยายลำดับออกไป รวมทั้งการคาดการณ์และการแก้ปัญหาได้ การสอนให้ทารกรับรู้เรื่องรูปแบบสามารถทำได้โดยผ่านกิจกรรมทางประสาทสัมผัสที่เกี่ยวข้องกับเสียง การเคลื่อนไหว หรือการสัมผัสพื้นผิวซ้ำๆ เช่น การตบมือ การแตะเท้า หรือการสัมผัสผ้าต่างๆ เด็กวัยหัดเดินสามารถเรียนรู้รูปแบบที่ซับซ้อนมากขึ้น โดยผ่านกิจกรรมต่างๆ เช่น การเรียงลำดับและจำแนกวัตถุตามคุณลักษณะ หรือการสร้างรูปแบบด้วยบล็อกหรือของเล่น การมีส่วนร่วมในกิจกรรมเหล่านี้จะช่วยเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีให้สร้างความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งส่งเสริมการพัฒนาทักษะทางความคิด การเคลื่อนไหว และทางสังคมได้ Burgoyne et al. (2019) ได้แสดงให้เห็นว่าการเรียนรู้เรื่องรูปแบบในวัยเด็กเล็กสามารถส่งเสริมพัฒนาการด้านการรับรู้ของเด็ก รวมถึงความสามารถในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหา

C6 การเปลี่ยนแปลง (change) หมายถึง แนวคิดที่ว่าสิ่งต่างๆ สามารถเปลี่ยนแปลงหรือถูกเปลี่ยนแปลงได้ในทางใดทางหนึ่งทั้งในเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ซึ่งอาจรวมถึงการเปลี่ยนแปลงจำนวน ขนาด รูปทรง สี พื้นผิว และคุณลักษณะอื่นๆ การเปลี่ยนแปลงอาจเกิดจากการรวม การแยก หรือการแปลงเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีเริ่มพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงผ่านประสบการณ์เกี่ยวกับวัตถุและเหตุการณ์ในสภาพแวดล้อมของตนเอง ตัวอย่างเช่น เด็กอาจสังเกตเห็นเมื่อวัตถุถูกย้ายจากที่หนึ่งไปยังอีกที่หนึ่ง เมื่อบล็อกที่ซ้อนกันล้มลง หรือเมื่อสภาพอากาศเปลี่ยนจากแดดจัดไปเป็นฝนตก เป็นต้น การเข้าใจการเปลี่ยนแปลงเป็นพื้นฐานของการเรียนรู้เกี่ยวกับโลกรอบตัว และเป็นแนวคิดตั้งต้น (precursor concept) ที่สำคัญสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ต่อไป เช่น การคำนวณ และการแก้ปัญหา การคำนวณพื้นฐาน เช่น การบวกและการลบ เกี่ยวข้องอย่างใกล้ชิดกับแนวคิดการเปลี่ยนแปลง เพราะทั้งการบวกและการลบเป็นการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงปริมาณ ไม่ว่าจะโดยการเพิ่มเข้าไปหรือเอาออกจากปริมาณ การแก้ปัญหาก็เช่นเดียวกัน มีความเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลง เนื่องจากแก่นของการแก้ปัญหาคือการเปลี่ยนแปลงคุณลักษณะของวัตถุ เขตของวัตถุ หรือเหตุการณ์จากที่เป็นอยู่ในปัจจุบัน ไปเป็นคุณลักษณะ

ที่ต้องการ เมื่อเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ สามารถเปลี่ยนแปลงหรือถูกเปลี่ยนแปลงได้ เด็กสามารถเริ่มพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการได้

การวิจัยพบว่าประสบการณ์และความเข้าใจเรื่องการเปลี่ยนแปลงในช่วงต้นของชีวิตมีผลกระทบอย่างมากต่อพัฒนาการทางคณิตศาสตร์ของเด็ก Baroody et al. (2006) พบว่าเด็กเล็กที่สามารถเข้าใจและใช้แนวคิดเรื่องการเปลี่ยนแปลงมีแนวโน้มที่จะประสบความสำเร็จในการเรียนรู้และทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย

ส่วนองค์ประกอบของคณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีที่เป็นประเภทการดำเนินการ (operation) นั้น มี 6 องค์ประกอบต่อไปนี้

O1 การนับ (counting) หมายถึง กระบวนการกำหนดตัวเลขให้กับวัตถุแต่ละชิ้นในกลุ่มหรือเซตของวัตถุ เพื่อระบุจำนวนของวัตถุในกลุ่มนั้น การนับเป็นหนึ่งในดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานที่สุดและเป็นหนึ่งในทักษะแรกๆ ที่เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีควรเรียนรู้ โดยที่เด็กอาจจะเรียนรู้ด้วยการท่องคำศัพท์ที่เป็นตัวเลขตามลำดับ โดยไม่จำเป็นต้องเข้าใจความหมายหรือแนวคิดของปริมาณ การวิจัยชี้ให้เห็นว่าเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีเรียนรู้การนับผ่านการผสมผสานของความสามารถที่มีมาแต่กำเนิดและประสบการณ์ในชีวิตประจำวันที่ได้จากสิ่งรอบตัว ทารกอายุเพียง 5 เดือนสามารถแยกแยะความแตกต่างระหว่างเซตที่มีจำนวนวัตถุต่างกันได้ หากเซตเหล่านั้นมีขนาดเล็ก รวมทั้งสามารถรับรู้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนวัตถุในเซตได้ (Brannon, 2002) เมื่ออายุครบหนึ่งขวบ เด็กจะเริ่มเข้าใจความหมายของคำที่เป็นตัวเลขและใช้แทนปริมาณของวัตถุในเซต และเมื่ออายุได้สองขวบ เด็กจะหัดเดินสามารถนับวัตถุได้สามหรือสี่ชิ้น และเข้าใจแนวคิดของการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence) ซึ่งหมายความว่าวัตถุแต่ละชิ้นจะได้รับคำที่เป็นตัวเลขที่ไม่ซ้ำกัน

O2 การสังเกต (observation) ในทางคณิตศาสตร์ การสังเกต หมายถึง การดู การฟัง และการสำรวจโลกรอบตัวเพื่อพัฒนาความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ เป็นองค์ประกอบสำคัญของคณิตศาสตร์ปฐมวัย การสังเกตเกี่ยวข้องกับการใช้ประสาทสัมผัสในการสำรวจสภาพแวดล้อม และในการทำกิจกรรมหรือเล่นกับวัตถุต่างๆ เช่น ของเล่น บล็อก ของใช้ในบ้าน และวัสดุอื่นๆ เมื่อเด็กสังเกตและมีปฏิสัมพันธ์กับวัตถุเหล่านี้ เด็กจะเริ่มพัฒนาความคิดและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีสามารถเริ่มรับรู้และเข้าใจแนวคิดพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น ปริมาณ รูปร่าง ขนาด และคุณลักษณะอื่นๆ ตลอดจนรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุ การจัดหมวดหมู่ และการเปรียบเทียบได้โดยผ่านการสังเกต เด็กเล็กเรียนรู้เกี่ยวกับรูปร่างและขนาดโดยการสังเกตวัตถุในสภาพแวดล้อมและความสัมพันธ์ระหว่างกัน ตัวอย่างเช่น ทารกและเด็กวัยเตาะแตะเริ่มเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน เช่น ความสมมาตร (symmetry) และความสมภาค (congruence) ได้โดยผ่านการสังเกตขนาดและรูปร่างของบล็อก การสังเกตยังมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาการรับรู้เรื่องปริภูมิสัมพันธ์ ซึ่งมีความสำคัญในคณิตศาสตร์หลายสาขา รวมถึงเรขาคณิตและการวัด เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีเรียนรู้เกี่ยวกับพื้นที่และระยะทางโดยการสังเกตการเคลื่อนไหวของวัตถุและผู้คนรอบข้าง นอกจากนี้ การสังเกตยังช่วยให้เด็กเล็กพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาอีกด้วย เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีจะเรียนรู้วิธีจัดการกับวัตถุเพื่อให้บรรลุเป้าหมายโดยการสังเกตว่าผู้อื่นมีปฏิสัมพันธ์กับวัตถุและสภาพแวดล้อมอย่างไร ตัวอย่างเช่น เมื่อสังเกตผู้ใหญ่ใช้ช้อนตักอาหาร เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีจะเรียนรู้วิธีใช้ช้อนด้วยตนเอง

O3 การจัดหมวดหมู่ (classification) คือความสามารถในการจำแนกประเภทวัตถุออกเป็นกลุ่มตามคุณลักษณะที่ต้องการ เช่น สี รูปร่าง ขนาด พื้นผิว และคุณสมบัติอื่นๆ เป็นแนวคิดพื้นฐานในคณิตศาสตร์ปฐมวัยสำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี และเป็นทักษะที่จำเป็นสำหรับเด็กในการพัฒนาหลายด้าน เนื่องจาก

ความสามารถนี้ช่วยให้เด็กเข้าใจโลกรอบตัว เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีเริ่มพัฒนาทักษะการจัดหมวดหมู่ตั้งแต่อายุ 6 เดือน ซึ่งเป็นช่วงวัยที่เด็กเริ่มรู้จักความเหมือนและความแตกต่างของสิ่งของต่างๆ ในช่วงแรกของการจัดหมวดหมู่ เด็กอาจจัดเรียงวัตถุตามคุณลักษณะเดียว เช่น สี หรือรูปทรง ตัวอย่างเช่น เด็กอาจจัดกลุ่มบล็อกสีแดงทั้งหมดเข้าด้วยกัน และบล็อกสีน้ำเงินทั้งหมดเข้าด้วยกัน เมื่อเด็กเติบโตและมีพัฒนาการที่ก้าวหน้าขึ้น เด็กอาจเริ่มจัดเรียงวัตถุตามคุณลักษณะมากกว่าหนึ่งคุณลักษณะ เช่น ตามรูปทรงและขนาด หรือตามรูปทรงและสี ตัวอย่างเช่น อาจจัดกลุ่มวัตถุทรงกลมขนาดใหญ่ทั้งหมดเข้าด้วยกัน และวัตถุทรงสี่เหลี่ยมขนาดเล็กทั้งหมดเข้าด้วยกัน การจัดหมวดหมู่วัตถุนี้ช่วยให้เด็กพัฒนาทักษะการคิดเชิงวิพากษ์ เช่น การแก้ปัญหา การจดจำรูปแบบ และการใช้เหตุผลเชิงตรรกะ นอกจากนี้ ยังปูพื้นฐานสำหรับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง เช่น การเรียงลำดับ การนับ และเรขาคณิต

O4 การเปรียบเทียบ (comparison) หมายถึง ความสามารถในการรับรู้ความเหมือนและความแตกต่างระหว่างวัตถุ สิ่งของ หรือปริมาณ เป็นการดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่เป็นรากฐานสำหรับทักษะทางคณิตศาสตร์ปฐมวัยอื่นๆ เช่น การจัดหมวดหมู่ การจับคู่ การเรียงลำดับ และการแก้ปัญหา การเปรียบเทียบขึ้นอยู่กับความสามารถในการสังเกตและรับรู้คุณลักษณะของวัตถุหรือเซตของวัตถุ เพราะการรับรู้คุณลักษณะทำให้เห็นความเหมือนและความแตกต่าง การศึกษาวิจัยพบว่าทารกอายุ 6 เดือนมีความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการเปรียบเทียบ สามารถรับรู้ความแตกต่างและความคล้ายคลึงกันระหว่างวัตถุตามคุณลักษณะ เช่น ขนาด รูปทรง และสี ทารกแสดงความชอบวัตถุขนาดใหญ่และมักจะมองวัตถุขนาดใหญ่ นานกว่าวัตถุขนาดเล็ก ซึ่งบ่งชี้ว่ามีความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการเปรียบเทียบขนาด (Xu & Arriaga, 2007) ทารกที่อายุ 12-14 เดือนสามารถแยกแยะระหว่างปริมาณต่างๆ ได้ เช่น สิ่งของสองชิ้นกับสามชิ้น (Feigenson & Carey, 2003) สิ่งสำคัญประการหนึ่งของการเปรียบเทียบในคณิตศาสตร์ปฐมวัยคือ ความสามารถในการเข้าใจและใช้ภาษาเปรียบเทียบ เช่น "มากกว่า" และ "น้อยกว่า" การที่เด็กจะมีความสามารถนี้ได้ เด็กต้องเข้าใจแนวคิดของปริมาณสัมพัทธ์ (relative quantity) และวิธีการนำไปแนวคิดนี้ใช้กับวัตถุหรือเซตของวัตถุ ตัวอย่างเช่น เด็กควรเข้าใจว่ากองที่มีบล็อก 5 ชิ้นนั้น "มากกว่า" กองที่มีบล็อก 3 ชิ้น

O5 การสร้างรูปแบบ (patterning) หมายถึง ความสามารถในการจดจำและสร้างลำดับแบบวนซ้ำ ๆ ของรูปทรง สี เสียง หรือการเคลื่อนไหว ความสามารถนี้จำเป็นต่อการพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในชีวิตต่อไป เนื่องจากการวางรากฐานสำหรับการทำความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนมากขึ้น เช่น เรขาคณิตและพีชคณิต มีงานวิจัยที่แสดงให้เห็นว่าความสามารถในการจดจำและสร้างรูปแบบในวัยเด็กนั้นสัมพันธ์กับความสำเร็จทางคณิตศาสตร์ในภายหลัง ตัวอย่างเช่น งานวิจัยของ Duncan et al. (2015) พบว่าทักษะการสร้างรูปแบบของเด็กก่อนวัยเรียนทำนายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา การสร้างรูปแบบสามารถสังเกตได้ในเด็กแรกเกิดตั้งแต่อายุ 6 เดือน และพัฒนาต่อไปจนถึงวัยหัดเดิน การศึกษาพบว่าเด็กเล็กสามารถจดจำและสร้างรูปแบบง่ายๆ ได้ก่อนที่เด็กจะนับหรือเข้าใจแนวคิดเรื่องตัวเลขเสียอีก ตัวอย่างเช่น การศึกษาโดย Feigenson et al. (2004) พบว่าทารกอายุ 6 เดือนสามารถจดจำและสร้างรูปแบบเสียงง่ายๆ ได้

รูปแบบหลักที่เด็กเล็กสามารถสร้างได้ ได้แก่

รูปแบบ ABAB: รูปแบบที่วัตถุ 2 ชิ้นที่แตกต่างกันสลับกัน เช่น สีแดง-สีน้ำเงิน-สีแดง-สีน้ำเงิน

รูปแบบ AABB: รูปแบบที่วัตถุ 2 คู่ที่แตกต่างกันสลับกัน เช่น สีแดง-สีแดง-สีน้ำเงิน-สีน้ำเงิน

รูปแบบที่เรียงซ้ำ: รูปแบบที่ลำดับของวัตถุจำนวนหนึ่งวนซ้ำๆ เช่น สีแดง-สีน้ำเงิน-สีเขียว-สีแดง-สีน้ำเงิน-สีเขียว

O6 การแก้ปัญหา (problem-solving) ในคณิตศาสตร์ปฐมวัยสำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี การแก้ปัญหาเกี่ยวข้องกับการใช้เหตุผลเชิงตรรกะและการคิดเชิงวิพากษ์เพื่อค้นหาวิธีแก้ปัญหาหรือสร้างวิธีใหม่ในการทำความเข้าใจตัวเลข รูปทรง และรูปแบบ เด็กเรียนรู้และพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาโดยการสำรวจ โลกรอบตัว ทดลองสิ่งของและวัตถุต่าง ๆ และมีส่วนร่วมในกิจกรรมที่สนุกสนานและท้าทายความคิด การวิจัยพบว่ากิจกรรมการแก้ปัญหามีความสำคัญต่อพัฒนาการทางความคิดและคณิตศาสตร์ของเด็ก หากเด็กมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหา เด็ก จะพัฒนาทักษะที่สำคัญหลายประการ ได้แก่

การให้เหตุผลเชิงตรรกะ: เด็กเรียนรู้ที่จะใช้เหตุผลแบบนิรนัยและอุปนัยเพื่อให้เข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์และค้นหาวิธีแก้ปัญห (Clements, 2004)

ความคิดสร้างสรรค์: กิจกรรมการแก้ปัญหกระตุ้นให้เด็กคิดอย่างสร้างสรรค์ และหาวิธีใหม่ในการแก้ปัญหาหรือทำความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Ginsburg, 2006)

ความอดทน: เด็กเรียนรู้ที่จะอดทนเมื่อเผชิญกับปัญหาที่ยาก และพยายามใช้วิธีต่างๆ จนกว่าจะพบวิธีแก้ปัญหา (Clements, 2004)

ความยืดหยุ่น: เด็กเรียนรู้ที่จะมีความยืดหยุ่นในการคิดและพิจารณามุมมองที่แตกต่างกันเมื่อแก้ปัญหา (Ginsburg, 2006)

ความรู้ทางคณิตศาสตร์: กิจกรรมการแก้ปัญหเปิดโอกาสให้เด็กได้พัฒนาความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ เช่น เรื่องจำนวน เรขาคณิต และการวัด (Clements, 2004)

นอกจากประโยชน์ที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว การแก้ปัญหายังช่วยให้เด็กพัฒนาทักษะทางสังคมและอารมณ์ที่สำคัญ เช่น ความร่วมมือ การสื่อสาร และความมั่นใจในตนเอง (Ginsburg, 2006)

เมื่อรวมองค์ประกอบทั้งแบบแนวคิดและแบบการดำเนินการเข้าด้วยกันแล้ว ข้อเสนอองค์ประกอบของคณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีในบทความนี้มีทั้งสิ้น 12 องค์ประกอบ เมื่อเปรียบเทียบกับข้อเสนอของ Chen et al. (2017) จะมีข้อแตกต่าง 2 ประการคือ ประการแรก ข้อเสนอในบทความนี้มีจำนวนองค์ประกอบมากกว่า เนื่องจาก Chen et al. (2017) เสนอเพียง 4 องค์ประกอบอันได้แก่ คุณลักษณะการเปรียบเทียบ รูปแบบ และการเปลี่ยนแปลง ประการที่สอง ข้อเสนอในบทความนี้แยกองค์ประกอบออกเป็น 2 ประเภท คือ แนวคิดและการดำเนินการ ซึ่งจะช่วยให้การสอน การจัดประสบการณ์ และการประเมินการสอนคณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีทำได้อย่างมีประสิทธิภาพ ตัวอย่างเช่น หากผู้ปกครอง ครู หรือพี่เลี้ยงเด็กพบว่าเด็กนับจำนวนไม่ได้ ก็สามารถวิเคราะห์สาเหตุได้ว่า มาจากการที่เด็กไม่เข้าใจแนวคิดเรื่องปริมาณและตัวเลข หรือมาจากการที่เด็กเข้าใจแนวคิดดังกล่าวแต่ไม่สามารถดำเนินการนับได้ (อันอาจมาจากทักษะทางภาษาที่ยังไม่พร้อม จึงนับไม่ได้) การวิเคราะห์ตามกรอบแนวคิดเช่นนี้จะช่วยให้ผู้ปกครอง ครู หรือพี่เลี้ยงเด็กเข้าใจสาเหตุที่ถูกต้องและแก้ไขปัญหได้

บทสรุป

หลักฐานเชิงประจักษ์จากงานวิจัยจำนวนมากในสาขาจิตวิทยาพัฒนาการและการศึกษาปฐมวัยแสดงให้เห็นว่า ความสามารถของเด็กเล็กในเรื่องคณิตศาสตร์ปฐมวัยนั้นเชื่อมโยงประสบความสำเร็จในโรงเรียน โดยไม่ขึ้นกับพื้นหลังครอบครัว IQ และปัจจัยอื่นๆ ของเด็ก (Chen et al., 2017; Harris & Petersen, 2019) คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานที่บูรณาการเรียนรู้และการพัฒนาด้านต่างๆ ของเด็ก เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีสามารถรับรู้แนวคิดและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานได้ โดยผ่านการทำกิจกรรม การเล่น และกิจวัตรประจำวัน ดังนั้นสถานพัฒนาเด็กปฐมวัยและครอบครัวจึงควรจัดประสบการณ์ การเล่น และกิจวัตรประจำวันที่ส่งเสริมคณิตศาสตร์ปฐมวัยให้กับเด็ก ข้อเสนอองค์ประกอบของคณิตศาสตร์ปฐมวัยในบทความนี้สามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการวางแผนและพัฒนา กิจกรรม การเล่น กิจวัตรประจำวัน และหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับเด็กอายุต่ำกว่า 3 ปีได้

References

- Aubrey, C., Godfrey, R. & Dahl, S. (2006). Early mathematics development and later achievement. *Mathematics Education Research Journal*, 18(1), 27-46.
- Chen, J., Hynes-Berry, M., Abel, B., Sims, C. & Ginet, L. (2017). Nurturing Mathematical Thinkers from Birth: The Why, What, and How. *ZERO TO THREE Journal*, 37(5), 23-26 and 31-33.
- Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. In *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 19-34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). *Early childhood mathematics learning. In Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461-555). Routledge.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2021). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., ... & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental psychology*, 43(6), 1428-1446.
- Feigenson, L., & Carey, S. (2003). Tracking individuals via object-files: Evidence from infants' manual search. *Developmental Science*, 6(5), 568-584.
- Harris, B. & Petersen, D. (2019). *Developing Math Skills in Early Childhood. Mathematica Policy Research Reports*. Princeton, NJ: Mathematica Policy Research.
- Hynes-Berry, D. C., Spelke, E. S., & Lemer, C. (2011). Early understanding of number: How do judgments of discrete and continuous quantities relate to addition and subtraction? *Journal of Experimental Child Psychology*, 108(2), 1-18.

- Hynes-Berry, M., Chen, J. Q., Abel, B., Sims, C., & Ginet, L. (2017). *Precursor mathematical concepts: The wonder of the mathematical work for infants and toddlers*. Chicago, IL: Erikson Institute.
- Institute of Medicine & National Research Council. (2015). *Transforming the workforce for children birth through age 8: A unifying foundation*. Washington, DC: The National Academies Press.
- Izard, V., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn Infants Perceive Abstract Numbers. *PNAS*, 106(25), 10382-10385.
- Johnson, S. P. & Moore, D.S. (2020). Spatial thinking in infancy: Origins and development of mental rotation between 3 and 10 months of age. *Cognitive Research*, 5(10). [open access]
- Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental science*, 14(6), 1292-1300.
- Mix, K. S., & Cheng, Y. L. (2012). The Relation Between Space and Math: Developmental and Educational Implications. *Advances in Child Development and Behavior*, 42, 197-243.
- Mix, K. S., & Sarnecka, B. W. (2006). *Infants' representation of ordinality and numerical events*. In Handbook of mathematical cognition (pp. 115-132). Psychology Press.
- Mrs. Myers' Learning Lab (2021). *Math Milestones for Kids by Age*.
<https://mrsmyersrr.com/math-milestones-kids-age>. (Accessed March 15, 2023)
- Nabila, L. A. & Widjajanti, D. B. (2020). Self-esteem in mathematics learning. *Journal of Physics: Conference Series*, 1581(1), 012049. [open access]
- National Association for the Education of Young Children (NAEYC). (2009). *Developmentally Appropriate Practice in Early Childhood Programs Serving Children from Birth through Age 8*. Position statement. Washington, DC: NAEYC.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Research Council. (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington, DC: The National Academies Press.
- Perry, N. E., & Elder, A. D. (2017). *Examining the Role of Pattern Recognition in Early Mathematical Learning*. *Early Education and Development*, 28(7), 843-862.
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352-402.
- Wagner, J. B., & Vecera, S. P. (2015). Differential processing of features within objects: Evidence from infants' visual object processing. *Cognition*, 140, 17-24.

- Xu, F., & Arriaga, R. I. (2007). Number discrimination in 10-month-old infants. *British Journal of Developmental Psychology*, 25(1), 103–108.
- Xua, F. & Spelke, E. S. (2000). *Large Number Discrimination in 6-Month-Old Infants*. *Cognition*, 74(1), B1-B11.